

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques, Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

3e SÉRIE

TOME QUATRIÈME

Année 1890.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1890

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

SUR UN THÉORÈME (*) DE DÉTERMIMANTS

Par M. E. Pomey.

Théorème I. — *Si l'on pose*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_{11} & \ldots & x_{1p} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & x_{n1} & \ldots & x_{np} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & b_{p1} & \ldots & b_{pp} \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{p1} & \ldots & b_{pp} \end{vmatrix};$$

on a

$$D = AB.$$

La proposition est évidente pour $n = 1$; comme on le vérifie en développant D, par rapport aux éléments do la première

(*) Ce théorème sert quelquefois de base à la démonstration du théorème de Cauchy, relatif au produit de deux déterminants (Voyez: Dostor, *Éléments de la théorie des déterminants*, p. 65.)

colonne. Pour démontrer que la proposition est générale, il suffit de l'admettre pour une certaine valeur entière de n et de reconnaître qu'elle subsiste quand on donne à n la valeur immédiatement supérieure.

A cet effet, désignons par A_i le mineur de A obtenu en supprimant la première colonne et la $i^{\text{ème}}$ ligne de A; et par X_i, le tableau formé par les éléments x, après la suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne. En développant D, par rapport aux éléments de sa première colonne, on a

$$(1)\quad D = a_{11}\begin{vmatrix} A_1 & X_1 \\ O & B \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} A_2 & X_2 \\ O & B \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}\begin{vmatrix} A_n & X_{n-1} \\ O & B \end{vmatrix}\ (*).$$

Or, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont les déterminants d'ordre $n - 1$ pour lesquels nous admettons la proposition. D'après cela, les coefficients de a_{11}, $-a_{21}$, ... dans la formule (1) ont pour valeurs, respectivement, A_1B, A_2B, ..., A_nB. Par suite, la formule (1) peut s'écrire :

$$D = (a_{11}A_1 - a_{21}A_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}A_n)B,$$

ou

$$D = AB.$$

La proposition est donc générale (**).

LIMITE DE L'EXPRESSION

$$\left(\frac{p_1a_1^{\frac{1}{m}} + p_2a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + p_na_n^{\frac{1}{m}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^m$$

LORSQUE m CROIT INDÉFINIMENT

Par M. **C. A. Laisant**, Docteur ès sciences.

1. — Si l'on désigne par y l'expression ci-dessus, on a

$$Ly = mL\left(\frac{p_1a_1^{\frac{1}{m}} + p_2a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + p_na_n^{\frac{1}{m}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right),$$

(*) Nous employons là une écriture symbolique qui s'explique d'elle-même.

(**) Comparez avec la démonstration analogue, donnée par M. Catalan dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, tome XIII, p. 8.

ou, en posant $m = \frac{1}{x}$.

$$Ly = \frac{L\left(\frac{p_1 a_1^x + p_2 a_2^x + \ldots + p_n a_n^x}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)}{x}.$$

Soit y_0 la valeur de y, pour $m = \infty$. Lorsque m tend vers l'infini, x tend vers zéro: le second membre prend la forme $\frac{0}{0}$. On aura donc la valeur de Ly_0, en prenant les dérivées des deux termes (ou plutôt celle du numérateur seulement, puisque celle du dénominateur est égale à l'unité), et en y faisant $x = 0$. Cette dérivée est

$$\frac{p_1 a_1^x La_1 + p_2 a_2^x La_2 + \ldots + p_n a_n^x La_n}{p_1 a_1^x + p_2 a_2^x + \ldots + p_n a_n^x}.$$

Pour $x = 0$, on a donc

$$Ly_0 = \frac{p_1 La_1 + p_2 La_2 + \ldots + p_n La_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{L(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n})}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n},$$

ou $$Ly_0 = L\left(\sqrt[p_1+p_2+\ldots+p_n]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}}\right),$$

et, par conséquent,

$$y_0 = \sqrt[p_1+p_2+\ldots+p_n]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}}.$$

2. Applications. — 1° Lorsqu'on fait $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, on a

$$\lim \left(\frac{a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{m}}}{n}\right)^m = \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

En supposant $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ... $a_n = n$, on a

$$\lim \left(\frac{1^{\frac{1}{m}} + 2^{\frac{1}{m}} + \ldots + n^{\frac{1}{m}}}{n}\right)^m = \sqrt[n]{n!}.$$

2° En remplaçant a_1, a_2, ... a_n, par les termes de la progression

$$1, q, q^2, \ldots q^{n-1},$$

on a $$a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{m}} = \frac{q^{\frac{n}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1},$$

et $$a_1 a_2 \ldots a_n = q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Donc $$\lim \left(\frac{q^{\frac{n}{m}} - 1}{n^{\frac{1}{m}} - 1} \right)^m = \sqrt{q^{n-1}},$$

etc.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE VARIGNON;

Par M. Georges **Darzens**, ancien Élève de l'École Polytechnique.

Le théorème de Varignon consiste en ceci : si l'on a plusieurs vecteurs issus d'un même point et si l'on se propose d'avoir le moment résultant de tous ces vecteurs par rapport à un second point, il est indifférent de prendre le moment de chacun de ces vecteurs et de les composer, ou de composer d'abord tous ces vecteurs et de prendre ensuite le moment de ce vecteur résultant.

J'ai voulu généraliser ce théorème; et je me suis posé la question suivante :

Supposons que l'on ait deux points M et N; l'on se donne un vecteur NQ et de ce vecteur on en déduit un second MP suivant une loi connue et bien déterminée. Quelle doit être cette loi pour qu'on obtienne le même résultat, soit en composant les vecteurs MP_1, MP_2... déduits de NQ_1, NQ_2..., soit en composant d'abord les vecteurs NQ_1, NQ_2 et en en déduisant ensuite, suivant la même loi, le vecteur correspondant passant par M?

Pour trouver l'expression analytique la plus générale de cette loi, prenons un système de coordonnées passant par M; et désignons par x, y, z, les coordonnées de N; par X, Y, Z, les projections de NQ; et par A, B, C, celles de MP. La loi la plus générale que l'on puisse imaginer est exprimée par les formules suivantes :

$$A = \varphi(x,y,z,X,Y,Z), \quad B = \chi(x,y,z,X,Y,Z), \quad C = \psi(x,y,z,X,Y,Z).$$

D'après l'énoncé, chacune des fonctions φ,χ,ψ doit jouir de la propriété suivante :

$$\Sigma A = \varphi(x,y,z,\Sigma X \Sigma Y \Sigma Z),$$

quels que soient X, Y, Z. On doit donc avoir

$$\varphi = \varphi_1(x,y,z)X + \varphi_2(x,y,z)Y + \varphi_3(x,y,z)Z; \quad \chi = \chi_1 X + \chi_2 Y + \chi_3 Z$$
$$\psi = \psi_1 X + \psi_2 Y + \psi_3 Z.$$

Les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, χ_1... peuvent d'ailleurs être quelconques. Mais si l'on veut de plus que la loi soit indépendante de la direction des axes, que ce soit, en d'autres termes, une véritable loi naturelle, il n'y aura plus que trois fonctions arbitraires; car B et C doivent pouvoir se déduire de A par permutation tournante :

$$A = \varphi_1(x,y,z)X + \varphi_2(x,y,z)Y + \varphi_3(x,y,z)Z,$$
$$B = \varphi_1(y,z,x)Y + \varphi_2(y,z,x)Z + \varphi_3(y,z,x)X,$$
$$C = \varphi_1(z,x,y)Z + \varphi_2(z,x,y)X + \varphi_3(z,x,y)Z.$$

Déterminons les fonctions arbitraires dans un cas particulier; exigeons, par exemple, que MP soit perpendiculaire au plan MNQ.

On devra avoir :

$$AX + BY + CZ = 0.$$

Mais nous savons que A, B, C sont des fonctions linéaires de X, Y, Z. Donc A, B, C ne peuvent être que les mineurs correspondant aux lettres α, β, γ dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X & Y & Z \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix}$$

De plus, on doit avoir

$$Ax + By + Cz = 0,$$

ou
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0;$$

quels que soient X, Y, Z, x, y, z, donc

$$f_1 = Kx, \qquad f_2 = Ky, \qquad f_3 = Kz;$$

et, finalement

$$A = K\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}, \quad B = K\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad C = K\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}.$$

On retrouve ainsi, à un facteur constant près, les expressions des moments.

Ce théorème, qui montre que la loi des moments est la seule qui puisse admettre le théorème de Varignon, lorsque MP est

perpendiculaire au plan MNQ, a une importance considérable dans les sciences naturelles.

Considérons, par exemple, un élément de courant *ds* situé dans un champ magnétique, dont la force, à l'endroit où se trouve l'élément de courant, est représentée en grandeur et direction par NQ. On sait que tout se passe comme si l'élément de courant était sollicité par une force perpendiculaire à MNQ et égale à *ids*F sin α. MP n'est donc autre chose que le moment de NF par rapport à M. Eh bien! un Physicien mathématicien aurait pu énoncer cette loi en sachant seulement que la force qui paraît solliciter l'élément est perpendiculaire au plan MNQ; ce que l'expérience peut vérifier facilement.

En effet, l'élément du courant n'a aucun instinct particulier qui puisse l'avertir si le champ magnétique où il se trouve est simple, ou s'il résulte de la superposition de plusieurs champs.

Par suite, la loi qui détermine la force qui sollicite l'élément en fonction de la force du champ, doit être telle qu'elle donne le même résultat, soit que l'on compose d'abord les forces des différents champs et qu'on déduise ensuite de cette résultante la force qui sollicite l'élément, soit qu'on compose les forces dues à chaque champ en particulier.

Cette remarque est particulièrement importante, si l'on se souvient que la loi de Biot et Savart a été plutôt démontrée par les conséquences qu'on a déduites, que par l'expérience directe du courant angulaire.

Cette courte analyse nous a été suggérée par les savantes leçons de M. Bertrand, au Collège de France.

RECHERCHES
SUR LES PERMUTATIONS CARRÉES

Par le Général **Michel Frolov.**

Voici ce que nous entendons sous cette dénomination.

Parmi les $P_n = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$ permutations de n lettres, on peut faire choix de n permutations telles que, dans chacune

d'elles, chaque lettre occupe un rang différent, de sorte qu'en rangeant ces n permutations les unes au-dessous des autres, en carré, toutes les rangées verticales représentent aussi des permutations composées de n lettres, chacune d'elles n'y entrant qu'une seule fois. La figure ainsi obtenue formera une *permutation carrée*.

Il peut paraître, à première vue, qu'en transposant entre elles les lignes horizontales et les lignes verticales d'un carré de cette espèce, on obtiendrait toutes les permutations carrées; et que, par conséquent, leur nombre serait égal à $(P_n)^2$; mais il n'en est rien; car parmi les variantes, obtenues de cette façon, certaines seraient identiques entre elles, et, d'un autre côté, pour des valeurs de n, dépassant 4, le nombre des permutations carrées excède de beaucoup la quantité $(P_n)^2$.

A

d	e	a	c	b
b	c	e	a	d
e	b	c	d	a
c	a	d	b	e
a	d	b	e	c

Nous présentons, dans cette Note, un résumé des résultats de nos recherches sur cette question.

Soit donné un carré quelconque A. Il est évident qu'en transposant les lignes horizontales et les lignes verticales, on peut toujours transformer le carré de telle façon, que les lettres des premières lignes, horizontale ou verticale, soient disposées dans l'ordre alphabétique. Nous appellerons *types* les carrés arrangés de cette façon. En général, un carré à n colonnes peut donner, par cette transformation, n types différents; car on peut mettre en première ligne, en haut, chacune des n lignes. Ainsi, le carré A, arrangé d'après chacune de ses cinq lignes, donne cinq types différents A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 :

A_1

a	b	c	d	e
b	c	e	a	d
c	a	d	e	b
a	e	b	c	a
e	d	a	b	c

A_2

a	*b*	*c*	*d*	*e*
b	*c*	*a*	*e*	*d*
c	*d*	*e*	*b*	*a*
d	*e*	*b*	*a*	*c*
e	*a*	*d*	*c*	*b*

A_3

a	*b*	*c*	*d*	*e*
b	*e*	*a*	*c*	*d*
c	*d*	*b*	*e*	*a*
d	*c*	*e*	*a*	*b*
e	*a*	*d*	*b*	*c*

A_4

a	*b*	*c*	*d*	*e*
b	*d*	*e*	*c*	*a*
c	*a*	*d*	*e*	*b*
d	*e*	*a*	*b*	*c*
e	*c*	*b*	*a*	*d*

A_5

a	*b*	*c*	*d*	*e*
b	*e*	*d*	*c*	*a*
c	*d*	*e*	*a*	*b*
d	*a*	*b*	*e*	*c*
e	*c*	*a*	*b*	*d*

Nous dirons que les n types provenant d'un même carré sont *congénères*. Mais il y a des carrés qui ne produisent qu'un seul type; par exemple le carré B ne produit que le type unique C.

B

$\underline{c}$	a	$\underset{\cdot}{e}$	$\underline{d}$	$\underset{\cdot}{b}$
(e)	$\dot{d}$	(b)	$\dot{c}$	a
$\underline{b}$	$\bar{c}$	a	$\underline{e}$	$\bar{d}$
a	$\dot{e}$	$\underset{\cdot}{d}$	$\dot{b}$	$\underset{\cdot}{c}$
(d)	$\bar{b}$	(c)	a	$\bar{c}$

C

a	(b)	$\underline{c}$	$\underline{d}$	(e)
$\bar{b}$	$\bar{e}$	$\dot{d}$	a	$\dot{c}$
$\bar{c}$	$\bar{d}$	$\underline{b}$	$\underline{e}$	a
$\underset{\cdot}{d}$	a	$\dot{e}$	$\underset{\cdot}{c}$	$\dot{b}$
$\underset{\cdot}{c}$	(c)	a	$\underset{\cdot}{b}$	(d)

Nous appellerons ces carrés types *réguliers* pour les distinguer des premiers, qui seront nommés *irréguliers*. Cette distinction est essentielle pour déduire le nombre des permutations carrées.

En considérant un carré régulier, on observe que tout rectangle composé de quatre cases occupées par des lettres quelconques s'y trouve n fois, avec les même lettres semblablement disposées. Par exemple, dans les carrés B et C, il y a cinq rectangles $\boxed{\begin{matrix} c - d \\ b - e \end{matrix}}$. Nous appellerons cette propriété: *uniformité rectangulaire*. Dans des carrés irréguliers, elle ne peut se rencontrer que partiellement; tandis que, dans des carrés réguliers, elle a lieu intégralement pour tous les rectangles (*). On peut exprimer l'uniformité rectangulaire en disant: si l'on prend deux lignes quelconques; et si les deux lettres de l'une sont remplacées par deux lettres quelconques de l'autre, le même échange de lettres existera entre toutes les autres lignes.

Tous les types réguliers sont nécessairement symétriques par rapport à la *diagonale principale*, celle qui descend de gauche à droite. Les types irréguliers peuvent également être symétriques; comme par exemple le type D qui présente aussi quelques rectangles uniformes :

$\boxed{\begin{matrix} a - b \\ b - a \end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix} a - c \\ c - a \end{matrix}}$, etc.

D

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
b	*a*	*f*	*e*	*c*	*d*
c	*f*	*a*	*b*	*d*	*e*
d	*e*	*b*	*a*	*f*	*c*
e	*c*	*d*	*f*	*a*	*b*
f	*d*	*e*	*c*	*b*	*a*

(*A suivre.*)

(*) Le nombre des rectangles différents dans un carré de n^2 cases est égal à $\frac{n(n-1)(n^2-n-1)}{2}$.

NOTE

SUR LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL (1889)

Par M. **G. Papelier**, professeur de mathématiques spéciales
au Lycée d'Orléans.

Dans la recherche de l'enveloppe des tangentes T aux coniques C, il est inutile de tenir compte de la condition (2) (voir *Journal*, 1889, page 199, solution de M. Rezeau); car le paramètre λ se trouve tout éliminé. Il résulte de là que la courbe trouvée est aussi l'enveloppe des droites B, perpendiculaires aux droites qui joignent leur pôle au point O. Les axes de la conique jouissant de cette propriété, sont tangents à cette même courbe.

Or si nous supposons que la conique C reste fixe, il y a une infinité de droites B, que l'on peut construire de la façon suivante.

Menons une droite quelconque par le point O; et, de son pôle, abaissons une perpendiculaire sur cette droite : cette perpendiculaire est une droite B. On sait que cette enveloppe est une parabole π tangente aux deux axes de la conique C (Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 145). Il résulte donc, de la solution analytique du problème du Concours, que si la conique C se déplace, en demeurant tangente à quatre droites équidistantes du point O (1), la parabole π reste fixe, de grandeur et de position.

Je me propose d'établir ce résultat par de simples considérations géométriques.

Soit I le centre d'une des coniques C : la droite OI est fixe; c'est la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites. Je dis que cette droite est la directrice de la parabole π qui correspond à la conique C. En effet, les tangentes à la parabole, issues de I, sont les axes de C; par suite, elles sont rectangulaires. Cherchons les tan-

(1) On peut, si l'on veut, faire abstraction de la parabole P de l'énoncé, puisqu'il existe toujours une parabole, et une seule, tangente à quatre droites.

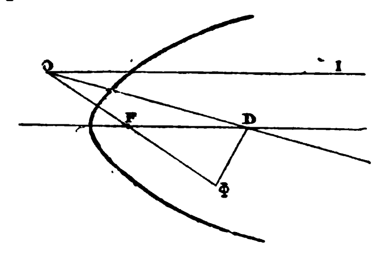
gentes issues du point O. Si une droite B passe par le point O, elle est perpendiculaire à la droite OH qui joint son pôle H au point O.

Cette droite B et la droite OH forment un système de deux droites rectangulaires et conjuguées par rapport à la conique; ce sont donc les bissectrices des angles des deux tangentes, issues du point O, à la conique C. Ce sont les deux droites B issues du point O, c'est-à-dire les deux tangentes à la parabole. Comme elles sont rectangulaires, le point O est un point de la directrice. Donc déjà la directrice de la parabole π est fixe.

Je vais montrer de même que les deux droites B, issues du point O sont fixes. Pour cela, les tangentes, issues du point O, à toutes les coniques C sont en involution : elles sont donc divisées harmoniquement par les deux mêmes droites. Mais, parmi les tangentes se trouvent les deux droites isotropes, qui sont les tangentes issues du cercle de centre O. Or, ces droites ne peuvent être divisées harmoniquement que par des droites rectangulaires; donc les rayons doubles de l'involution sont rectangulaires : ce sont donc les bissectrices des tangentes à toutes les coniques issues du point O; donc ces droites sont fixes.

Je dis enfin que les paraboles π ont même tangente au sommet. Tout revient à mener, à la parabole π, une tangente parallèle à OI. Je trace OL perpendiculaire à OI; et, du pôle K de OL j'abaisse KM perpendiculaire sur OL : c'est la tangente au sommet. Tous les pôles de la droite OL sont en ligne droite : cette droite, passant par le pôle de OL par rapport au cercle est parallèle à OI; donc c'est la droite KM.

En conséquence, toutes les paraboles π ont même directrice, même tangente au sommet, mêmes tangentes issues du point O : elles coïncident; et le problème est résolu.



On peut maintenant déterminer les éléments de la parabole π, en fonction de ceux de la parabole P.

La directrice de π est la droite OI, menée de O, parallèlement à l'axe de P. Cet axe est la tangente au sommet de π. La

bissectrice OD de l'angle IOF est tangente à la parabole π. Donc si, par le point D, où elle rencontre l'axe de P, je mène une perpendiculaire à OD, elle coupe OF au foyer Φ de π; et l'on voit aisément que $OF = F\Phi$.

La parabole π est ainsi déterminée par son foyer et sa directrice. On retrouve les résultats de la discussion analytique.

EXERCICES ÉCRITS

7. — Soit un triangle de référence quelconque; au point (x_0, y_0, z_0) (*) on fait correspondre la droite Δ_0 dont l'équation est

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 0.$$

Ainsi, au point de concours des bissectrices du triangle de référence correspond la droite $x + y + z = 0$; au centre de gravité, la droite de l'infini; au point de concours des hauteurs la droite $x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0$, etc; j'appelle M_0 le pôle de la droite Δ_0; je dis, de même, que Δ_0 est la polaire du point M_0.

Soit Δ_m la droite ayant pour pôle M; les polaires des points situés sur Δ_m sont tangentes à une conique inscrite au triangle de référence, et le touchant aux points α, β, γ tel que $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en M. Cette conique I_m sera dite *conique inscrite correspondant à* M.

Le lieu des pôles des droites passant par un point fixe est une conique C_m circonscrite au triangle de référence, dite *conique circonscrite correspondant au point* M.

Les deux coniques C_m et I_m sont bitangentes, la corde de contact étant Δ_m.

Le lieu géométrique des points M, tels que la conique I_m soit une parabole, est la conique circonscrite C_g correspondant au centre de gravité G.

Le lieu géométrique des points M, tels que la conique C_m soit une parabole, est la conique inscrite I_g correspondant au centre de gravité G.

(*) Coordonnées normales.

Les deux coniques I_g et C_g sont homothétiques et concentriques.

Le lieu des points M, pour lesquels la conique I_m est une parabole équilatère est une courbe du quatrième ordre Δ_4 admettant comme points doubles les sommets du triangle de référence.

Le lieu des points M, pour lesquels les coniques C_m sont des hyperboles équilatères, est la polaire du point de concours des hauteurs.

Raymond Levavasseur,
(Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Moulins).

Notes sur l'exercice 26.

1° En posant $zox = z'oy = \alpha$, l'hyperbole équilatère considérée a pour équation

$$(x - a\cos^2\alpha)(x - b\sin\alpha\cos\alpha) - (y - a\sin\alpha\cos\alpha)(y - b\cos^2\alpha) = 0.$$

La courbe correspondante passe par l'origine.

2° Le lieu du centre, ou le lieu du milieu de RR', s'obtient en éliminant α entre les équations

$$2x = a\cos^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha, \quad 2y = b\cos^2\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha.$$

On les écrit ainsi :

$$a\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha = 4x - a,$$
$$a\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha = 4y - b.$$

L'équation du lieu est

$$(a^2 - b^2)^2 = \{a(4x - a) - b(4y - b)\}^2 + \{a(4y - b) - b(4x - a)\}^2.$$

La courbe correspondante est une ellipse. On vérifiera facilement que son centre est au milieu de la médiane OC du triangle OAB. Les axes sont dirigés suivant les bissectrices des axes proposés : ils ont pour longueurs, respectivement $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$.

3° Le lieu demandé est une ellipse. En observant que S et T décrivent deux droites fixes passant par l'origine et, en prenant OS, OT pour nouveaux axes, on trouve

$$\left(X + Y\cos\theta - \frac{c}{4}\right)^2 + (X\cos\theta + Y)^2 = \frac{c^2}{16}.$$

En posant : $c^2 = a^2 + b^2$.

4° L'équation générale des cercles Γ peut se mettre sous la forme

$$\frac{cX}{2}\cos\varphi + \frac{cY}{2}\sin\varphi = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta - \frac{cY}{2},$$

L'enveloppe demandée a donc pour équation

$$\left(X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta - \frac{cY}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}(X^2 + Y^2).$$

Cette équation représente une quartique bi-circulaire, ayant un rebroussement à l'origine.

Nota. — M. Mayoux, maître répétiteur au collège d'Issoudun, nous a envoyé une solution très simple, différente de la précédente, de l'exercice 26.

BIBLIOGRAPHIE

La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle Radici quadrate irrazionali dei numeri interi, per Bellino Carrara.

On sait que, pour approcher d'une racine d'une équation, il y a deux méthodes : celle de Lagrange et celle de Newton. Il est évident qu'elles peuvent être appliquées à l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier N, et il est naturel de comparer les résultats ainsi obtenus. C'est la question que s'est proposée M. Bellino Carrara et qu'il a résolue dans une brochure publiée à Turin sous le titre *La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle Radici quadrate irrazionali dei numeri interi.*

L'auteur montre d'abord qu'en développant $\sqrt{N}$ en fraction continue périodique, et désignant par n le nombre des quotients incomplets de la période, le calcul de la réduite de rang kn, k étant un nombre entier, permet de passer aux réduites de rang $2kn$, 2^2kn, 2^3kn, etc. Il est alors facile de voir qu'en prenant comme valeur approchée de $\sqrt{N}$ la réduite de rang kn, et appliquant la méthode de Newton, on est conduit, successivement, aux réduites de rang $2kn$, 2^2kn, 2^3kn, etc. C. J.

QUESTIONS RÉSOLUES

1. — *Lieu des centres des cercles* C *qui coupent trois cercles donnés* C_1, C_2, C_3, *sous le même angle* φ.

On sait que ce lieu est une droite; cette proposition se vérifie bien simplement par le calcul suivant.

Soient

$$C = (X - x)^2 + (Y - y)^2 - \rho^2 = 0,$$
$$C_1 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 - R_1^2 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

les équations des cercles C, C_1, C_2 et C_3.

On a

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R_1^2 + \rho^2 - 2R_1\rho \cos \varphi,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Entre ces trois équations, éliminons ρ et φ; ou, ce qui revient

au même, ρ^2 et $\rho \cos \varphi$, nous avons l'équation du lieu

$$\begin{vmatrix} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - R_1^2 & R_1 & 1 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - R_2^2 & R_2 & 1 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - R_3^2 & R_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Avec la notation abrégée, ce résultat s'écrit

$$\begin{vmatrix} C_1 & R_1 & 1 \\ C_2 & R_2 & 1 \\ C_3 & R_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\text{(A)} \quad 0 = R_1(C_2 - C_3) + R_2(C_3 - C_1) + R_3(C_1 - C_2).$$

Le lieu demandé est donc une droite Δ passant par le centre radical des cercles proposés, résultat évident, *a priori*. On voit aussi, *a priori*, que Δ passe par le centre des deux cercles qui sont tangents aux trois cercles donnés, et qui se distinguent des six autres cercles analogues par ce fait que le premier enveloppe les cercles donnés et que l'autre est enveloppé par ceux-ci. Il faut observer en effet que, dans le calcul précédent, φ désigne l'angle bien déterminé, formé par les semi-droites qui vont de l'un des points communs à C et à C_1, aux centres de ces cercles.

Les trois points remarquables que nous signalons, *a priori*, comme situés sur Δ, correspondent aux hypothèses :

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = 0, \qquad \varphi = \pi.$$

Si l'on cherche, de même, le lieu des centres des cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles φ, φ, et $\pi - \varphi$, le même calcul conduit à une équation analogue à (A); la seule modification portant sur le signe de l'un des termes, qui se trouve être négatif.

En désignant par $D_1 = 0$, l'équation de l'axe radical des cercles C_2 et C_3, on obtient ainsi quatre droites correspondant à l'équation

$$R_1D_1 \pm R_2D_2 \pm R_3D_3 = 0.$$

On sait (*), par l'élégante construction de Gergonne, que

(*) Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6me édition, p. 206.
Rouché et de Comberousse, 4me édition, p. 243.

l'on peut mener huit cercles tangents à trois cercles donnés; il résulte, de ce qui précède, que *les droites qui joignent les centres de ces cercles, combinés deux à deux convenablement, concourent au centre radical.*

QUESTION 172

Solution par M. J. MOULET, au Collège de Manosque.

On considère une ellipse Γ_1*; on imagine une seconde ellipse* Γ_2 *ayant deux sommets communs avec* Γ_1 *et admettant, pour ses deux autres sommets, les foyers de* Γ_1*. Soit* Γ_3 *une ellipse déduite de* Γ_2*, comme* Γ_2 *l'a été de* Γ_1*; et ainsi de suite.*

On demande combien de ces coniques Γ *seront, au début, allongées suivant l'axe* OX*; combien, ensuite, on en trouvera d'allongées suivant* Oy*; et ainsi de suite.* (G. L.)

Désignons par a et b les demi-axes de Γ_1 et posons :

$$a^2 = pb^2.$$

Les carrés des demi-axes et celui de la distance focale seront donc

$$pb^2, \qquad b^2, \qquad (p-1)b^2.$$

Les éléments analogues de Γ_2 seront

$$(p-1)b^2, \qquad b^2, \qquad (p-2)b^2;$$

en continuant on trouve en général, pour Γ_k :

(1) $$(p-k+1)b^2, \qquad b^2, \qquad (p-k)b^2.$$

Ceci posé, distinguons deux cas :

1° p *entier.*

Tant que $(p-k)b^2$ est $> b^2$, Γ_{k+1}, dont les demi-axes sont $(p-k)b^2$ et b^2, est allongée suivant Ox.

Si l'on fait $k = p$, on trouve pour les demi-axes de Γ_p :

$$b^2, \qquad b^2;$$

et, pour la distance focale, o.

L'ellipse a dégénéré en cercle, et la transformation n'est plus possible.

Quand p *est entier, il y a* p *ellipses allongées suivant* Ox*; la dernière est un cercle.*

2° p *non entier.*

Développons p en fraction continue :

$$p = m_0 + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cdots}}}$$

Désignons par ε_k la quantité

$$\cfrac{1}{m_k + \cfrac{1}{m_{k+1} + \cfrac{1}{m_{k+2} + \cdots}}}$$

$$p = m_0 + \varepsilon_1.$$

En remplaçant dans les expressions (1), on a pour les éléments de Γ_k

$$(m_0 + 1 + \varepsilon_1 - k)b^2, \quad b^2, \quad (m_0 + \varepsilon_1 - k)b^2.$$

Tant que k est moindre que m_0, la distance focale est plus grande que le petit axe, et la transformation donnera encore une ellipse allongée suivant Ox.

Faisons $k = m$.

$$\Gamma_{m_0} \quad (1 + \varepsilon_1)b^2 \quad b^2 \quad \varepsilon_1 b^2$$

L'ellipse suivante aura son grand axe b suivant Oy et son petit axe suivant Ox,

on a : $$\varepsilon_1 = \frac{1}{m_1 + \varepsilon_2},$$

ou $$1 = (m_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_1.$$

Dans Γ_{m_0+1}, on aura donc, pour carrés des demi-axes

$$(m_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_1 b^2, \quad \varepsilon_1 b^2.$$

Nous retombons dans le cas précédent, avec cette seule différence que le grand axe sera dirigé suivant Oy. On aura donc m_1 ellipses, allongées suivant Oy.

$\Gamma_{m_0+m_1}$ aura les éléments :

$$(1 + \varepsilon_2)\varepsilon_1 b^2, \quad \varepsilon_1 b_2, \quad \varepsilon_2 \varepsilon_1 b^2.$$

En général, pour $\Gamma_{m_0+m_1+\ldots m_k}$, on aura

$$(1 + \varepsilon_{k+1})\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k b^2, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k b^2, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k+1} b^2.$$

Lorsque p est commensurable, on a :

$$p = m_0 + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cdots + \cfrac{1}{m_n}}}$$

et l'ellipse $\Gamma_{m_0+m_1+\ldots m_n}$ sera un cercle, puisque $\varepsilon_{n+1} = 0$: la transformation ne sera plus possible.

Au contraire, si p est incommensurable, ε_{k+1} ne s'annulera jamais; et l'on trouvera, alternativement, des ellipses allongées suivant Ox et des ellipses allongées suivant Oy.

Les quantités m affectées d'indices pairs m_0, m_2... indiqueront le nombre des ellipses de la première catégorie; les autres m_1, m_3,... représenteront le nombre des ellipses allongées suivant Oy.

QUESTION 210

Solution par M. H. X.

On considère un cercle de rayon variable et de centre fixe O, *et une droite fixe* Δ, *passant par* O *et coupant le cercle en* A, B. *On porte de* A *vers* O, *sur* Δ, *une longueur constante* AC = l. *Par le point* C, *on mène une droite inclinée à* 45° *sur* OA : *elle coupe le cercle en* P, Q. *Lieu de ces deux points.*

(Troille)

Prenons pour axes Δ et une perpendiculaire passant par O. Éliminant R entre l'équation d'un cercle

$$x^2 + y^2 = R^2$$

et celle de la droite à 45° menée par C,

$$y = x - R + l,$$

on obtient

$$x^2 + y^2 = (x - y + l)^2 \text{ ou } 2xy + 2l(y - x) - l^2 = 0;$$

équation d'une hyperbole équilatère qui a l'origine pour foyer.

Nota. — Solution par M. Delbourg, maître répétiteur au lycée d'Agen.

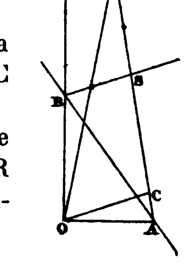
QUESTION 222

Solution par M. L. Delbourg, maître répétiteur, à Agen.

On considère un triangle rectangle AOB; *par les points* A, B *on mène deux droites rectangulaires mobiles qui se coupent en* SO *on imagine une parabole* P *de sommet* S, *ayant* SA *pour axe et passant par* O.

1° *La tangente en* O *rencontre* AS *en un point* I; *démontrer que le lieu décrit par* I *est une circonférence.*

2° *L'enveloppe des paraboles* P *est une cissoïde oblique.* (G. L.)



1° Menons OC perpendiculaire à l'axe de la parabole; d'après une propriété connue, SC = SI.

Il s'ensuit que la parabole IR à OC rencontre OB en un point tel que BO = BR. Le point R est donc fixe et le lieu du point I est la circonférence décrite sur AR comme diamètre.

2° L'équation de la parabole P est

$$b[y - \lambda(x - a)]^2 + \lambda a^2[\lambda(y - b) + x] = 0;$$

(a, b désignant OA, OB),

ou bien, en ordonnant par rapport à λ :

$$\lambda^2[b(x - a)^2 + a^2(y - b)] + \lambda[a^2x - 2by(x - a)] + by^2 = 0.$$

L'équation de l'enveloppe est donc

$$[a^2x - 2by(x - a)]^2 - 4by^2[b(x - a)^2 + a^2(y - b)] = 0,$$

ou

$$(\alpha) \qquad 4by(x^2 + y^2) - (2by + ax)^2 = 0.$$

La courbe est du troisième degré, elle passe à l'origine, qui est un point de rebroussement. La tangente en ce point est représentée par

$$2by + ax = 0.$$

L'équation (α) nous montre que la courbe passe par les ombilics du plan : la courbe est donc une cissoïde.

Elle est oblique, car la tangente au point de rebroussement

n'est pas perpendiculaire à la droite dont l'équation est

$$y = \frac{a^2}{4b},$$

laquelle est asymptote à la courbe.

Nota. — Solutions analogues par MM. Leinekugel, élève au lycée Charlemagne; Thouzelier, élève au lycée de Montpellier; Étienne Pacot, élève au lycée de Montpellier; A. Favery, élève au lycée de Montpellier; Georges Bernache Assolant, élève au lycée Condorcet; Rezeau, conducteur des Ponts et Chaussées, à la Roche-sur-Yon; Balitrand, élève au lycée de Nîmes; Dumanoir, élève au lycée Charlemagne; Cazalis; Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet; et X.

QUESTIONS 266 ET 271

Solution par M. Leinekugel, élève au Lycée Charlemagne.

266. — *On inscrit à un triangle fixe* ABC, *tous les triangles* A'B'C' *ayant même centre de gravité* G. *Démontrer que les côtés* B'C', C'A', A'B' *enveloppent trois paraboles.*

271. — *Étant données trois droites* a, b, c, *parallèles à un même plan, on considère tous les triangles* ABC *dont les sommets sont situés sur ces droites et qui ont même centre de gravité* G. *Démontrer que les côtés de ces triangles sont les génératrices de trois paraboloïdes, et que les plans* ABC *enveloppent un cône du second ordre.* *(J. Neuberg.)*

Le point c', du lieu de AB, doit être situé dans un plan h parallèle aux droites a et b équidistant de ces mêmes droites et ensuite sur la droite c' parallèle à c, situé dans le plan déterminé par le point G et la droite c, et telle que le rapport des distances du point G à c' et à c soit égal à $\frac{1}{2}$.

On voit donc que si les droites a, b, c sont les génératrices d'un hyperboloïde, il n'y a qu'un seul triangle satisfaisant à la question; la droite c' perce en effet le plan h en un point unique.

Si les droites a, b, c sont parrallèles à un même plan P, il faut que la droite c' soit dans le plan h, pour qu'il y ait une

infinité de triangles ABC, c'est-à-dire que le point G doit être dans un plan parallèle à P tel, que le rapport de ses distances au plan h et au plan parallèle à P, mené par c, soit égal à $\frac{1}{2}$.

Cette condition étant supposée remplie, toute droite s'appuyant sur a, c' et b est côté d'un triangle ABC. Cette droite AB engendre un paraboloïde hyperbolique P_c qui touche constamment le plan ABC. D'où il résulte que le plan ABC enveloppe le cône Σ, de sommet G, circonscrit au paraboloïde P_c.

Les côtés BC, CA engendrent aussi deux autres paraboloïdes hyperboliques P_a, P_b, évidemment inscrits au même cône du second ordre Σ.

Remarque. — Si nous effectuons une projection cylindrique, nous déduisons, en nous appuyant sur une propriété connue des génératrices des quadriques, que les côtés des triangles dont les trois sommets décrivent trois droites d'un plan et dont le centre de gravité est en un point fixe G, enveloppent trois paraboles.

Ces paraboles sont sur le plan de base, les paraboles de contour apparent des trois paraboloïdes P_a, P_b, P_c. Cette remarque résoud la question 266.

Note. — Voici l'indication de la solution que l'Auteur de la question nous avait adressée :

266. — Le milieu de A″ de B′C′ décrit une droite YZ, parallèle à BC, telle que le rapport des distances de G à cette droite et à BC soit égal à $\frac{1}{2}$.

Dans ces conditions, la droite B′C′ enveloppe une parabole p_a, qui touche les droites AB, AC, ZY, cette dernière au milieu du segment limité par l'angle BAC.

De même, les droites C′A′, A′B′ enveloppent deux autres paraboles p_b p_c. Les trois courbes p_a, p_b, p_c ont deux tangentes communes (réelles ou imaginaires); savoir, les droites menées par G et rencontrant les côtés du triangle ABC en trois points dont G est le centre des moyennes distances.

Nota. — **M. Rezeau, conducteur des Ponts et Chaussées, à Laroche-sur Yon, nous a adressé une solution analytique de la question 266.**

QUESTIONS PROPOSÉES

276. — Deux sommets opposés d'un quadrilatère complet restant fixes, deux autres, non opposés, décrivant une conique, et l'un des deux sommets restants décrivant une ligne droite, on demande le lieu du sixième sommet. (C'est une conique.)

Si la droite donnée est parallèle à la polaire de l'un des deux sommets fixes par rapport à la conique donnée; si, de plus, elle se trouve à égale distance de ce sommet et de cette polaire, les deux coniques seront homothétiques. Le démontrer géométriquement.

Questions analogues : la conique donnée étant remplacée par une quadrique, et la droite donnée par un plan.

(Tissot.)

277. — On donne une ellipse de centre O, dont les demi-axes sont a et b. On prend sur cette courbe un point m tel que la normale en ce point, à l'ellipse, fasse avec le grand axe un angle ω. On demande de déterminer en fonction de a, b, ω:

La distance de O à la tangente en m à l'ellipse,

La distance de O à la normale en m,

La longueur Om et celle du demi-diamètre conjugué de Om,

L'angle de Om avec le grand axe,

La distance de m aux deux foyers de l'ellipse,

La longueur de la portion de la normale en m comprise entre ce point et le grand axe,

Le rayon de courbure de l'ellipse, pour le point m.

(A. M.)

ERRATUM (*)

Lignes 13 et 14, p. 268 (1889); *il faut lire:*

La cubique (7) a été retrouvée par M. Vazeille (*J. S.* 1886, question proposée 114) et résolue par M. Taratte (*ibid.* pp. 186-188). Cette solution a été complétée par une note de M. de Longchamps.

(*) Communiqué par M. Vigarié.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 30228-12-9.

RECHERCHES

SUR LES PERMUTATIONS CARRÉES

Par le Général **Michel Frolov.**

(*Suite et fin*, voir p. 8)

On appelle *substitution* l'opération par laquelle on passe d'une permutation à une autre, en remplaçant les lettres les unes par les autres. Nous appellerons *base* la permutation primordiale, de laquelle on passe à toutes les autres permutations d'un carré, au moyen de $(n - 1)$ substitutions différentes, et nous représenterons ces substitutions en écrivant en ligne la lettre remplaçante, immédiatement après celle qu'elle remplace. Par exemple, si l'on remplace *a* par *b*, *b* par *e*, *e* par *h* et *h* par *a*, nous écrirons la suite *abeh*, en disant qu'elle forme un cycle de quatre lettres. Nous écrirons les cycles en commençant par la lettre supérieure de l'alphabet.

Une substitution complète de *n* lettres ne formant qu'un seul cycle est dite *entière* ou *circulaire*. Si elle est composée de deux ou de plusieurs cycles de deux, trois... $(n - 2)$ lettres, nous dirons qu'elle est *brisée*. Nous écrivons les substitutions brisées en commençant chaque cycle par sa lettre supérieure et nous séparons les différents cycles par des tirets. Par exemple, pour neuf lettres la substitution *abhfciedg* sera entière et *ab* — *cfgi* — *dhe* sera brisée. En mettant les lettres des deux cycles dans le sens opposé on aura *agdeicfhb* et *ab* — *cigf* — *deh*. Nous dirons que ces nouvelles substitutions sont les *opposées* des premières. Les substitutions qui ne renferment que des cycles à deux lettres sont opposées à elles-mêmes. Si une substitution sert à passer d'une permutation M à une autre N, son opposée servira à passer de N à M.

Nous formerons les substitutions en prenant pour base la première ligne horizontale et en passant de cette ligne, successivement, aux $(n - 1)$ autres lignes. Ainsi, on aura pour le type irrégulier A_1 la table des substitutions A_1 :

A_1

a	b	c	e	d	Les substitutions opposées formeront la table	a	b	c	d	c
a	c	d	e	b		a	c	$e-b$		d
a	d	c	b	e		a	d	e	c	b
a	e	$c-b$		d		a	e	b	c	d

qui servira à construire le type E, et nous dirons que ce type est l'*opposé* du type A_1.

Nous avons dit que tout carré irrégulier de n lettres produit n types congénères et que chaque type a son opposé. Si ces types irréguliers ne sont pas symétriques par rapport à la diagonale principale, en les renversant autour de celle-ci on aura de nouveaux types qui seront les *inverses* des premiers. Il y a des types irréguliers dont les inverses et les opposés sont identiques entre eux. Par exemple pour $n = 5$, le type F est en même temps l'inverse et l'opposé du type G et réciproquement G est l'inverse et l'opposé de F.

E

a	b	c	d	e
b	e	a	c	d
c	d	e	b	a
d	a	b	e	c
e	c	d	a	b

Ainsi, il existe entre tous les types irréguliers une liaison

F

a	b	c	d	e
b	a	d	e	c
c	e	a	b	d
d	c	e	a	b
e	d	b	c	a

G

a	b	c	d	e
b	a	e	c	d
c	d	a	e	b
d	e	b	a	c
e	c	d	b	a

étroite qui permet de déduire d'un seul d'entre eux tous les autres, par la construction successive des congénères, opposés et inverses, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus aucun type nouveau.

Les types réguliers, dépourvus de congénères, n'ont plus de types opposés, car leurs substitutions sont opposées les unes aux autres. Étant symétriques, ils n'ont pas de types inverses. Pour n pair le nombre de substitutions $(n - 1)$ étant impair, il s'ensuit qu'au moins une d'elles est composée uniquement de cycles à deux lettres.

On peut former quelques-uns des types réguliers directement en prenant une permutation quelconque et, sans changer l'ordre de la disposition des lettres, en faisant commencer les autres lignes par la deuxième lettre, par la troisième et ainsi de suite. Tel est le type H.

H

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
b	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*
c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*
d	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*
e	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*
f	*g*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
g	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*

Voici la règle générale pour obtenir les types réguliers de n lettres : — Il faut prendre une substitution entière quelconque; pour composer une nouvelle substitution il faut prendre dans la première les lettres y occupant les rangs 1, 3, 5, 7, etc., qui forment la progression arithmétique dont la raison est 2; pour trouver encore une substitution, on prend les lettres à des rangs 1, 4, 7, 10, etc., formant la progression dont la raison est 3, et ainsi de suite. Par exemple, pour $n = 6$,

en prenant la substitution	*a*	*d*	*e*	*f*	*c*	*b*
on aura avec la raison 2 :	*a*	*e*	*c* — *b*		*d*	*f*
— — 3 :	*a*	*f* — *b*		*e* — *c*		*f*
— — 4 :	*a*	*c*	*e* — *b*		*f*	*d*
— — 5 :	*a*	*b*	*c*	*f*	*e*	*d*

Ces substitutions produisent le type régulier I :

Pour obtenir le nombre des types réguliers de cette espèce, il faut diviser le nombre de manières de former la substi-

tution primordiale $1 \times 2 \times 3 \ldots \times (n-1)$ par la quantité $(n-1-q)$, où q est le nombre des nombres, inférieurs à n, non premiers avec ce dernier. Ainsi, pour $n=4$, on aura trois types; $n=5$ — 6 types; $n=6$ — 60 types, etc.

Si n est une puissance d'un nombre quelconque p, il y a des types réguliers d'une formation particulière, représentés totalement par des substitutions brisées, composées de cycles égaux, à p lettres. Tels sont les types K, L et M, accompagnés de leurs tables de substitutions :

J

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
b	*c*	*f*	*a*	*d*	*e*
c	*f*	*e*	*b*	*a*	*d*
d	*a*	*b*	*e*	*f*	*c*
e	*d*	*a*	*f*	*c*	*b*
f	*c*	*d*	*c*	*b*	*a*

K

a	*b*	*c*	*d*
b	*a*	*d*	*c*
c	*d*	*a*	*b*
d	*c*	*b*	*a*

,

$$\left|\begin{matrix} a & b-c & d \\ a & c-b & d \\ a & d-b & c \end{matrix}\right| ;$$

L

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
b	*a*	*e*	*h*	*c*	*g*	*f*	*d*
c	*e*	*a*	*f*	*b*	*d*	*h*	*g*
d	*h*	*f*	*a*	*g*	*c*	*e*	*b*
e	*c*	*b*	*g*	*a*	*h*	*d*	*f*
f	*g*	*d*	*c*	*h*	*a*	*b*	*e*
g	*f*	*h*	*e*	*d*	*b*	*a*	*c*
h	*d*	*g*	*b*	*f*	*e*	*c*	*a*

,

$$\left|\begin{matrix} a & b-c & e-d & h-f & g \\ a & c-b & e-d & f-g & h \\ a & d-b & h-c & f-e & g \\ a & e-b & c-d & g-f & h \\ a & f-b & g-c & d-e & h \\ a & g-b & f-c & h-d & e \\ a & h-b & d-c & g-e & f \end{matrix}\right| ;$$

M

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
b	*c*	*a*	*e*	*f*	*d*	*h*	*i*	*g*
c	*a*	*b*	*f*	*d*	*e*	*i*	*g*	*h*
d	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*a*	*b*	*c*
e	*f*	*d*	*h*	*i*	*g*	*b*	*c*	*a*
f	*d*	*e*	*i*	*g*	*h*	*c*	*a*	*b*
g	*h*	*i*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
h	*i*	*g*	*b*	*c*	*a*	*e*	*f*	*d*
i	*g*	*h*	*c*	*a*	*b*	*f*	*d*	*e*

$a\ b\ c - d\ e\ f - g\ h\ i$
$a\ c\ b - d\ f\ e - g\ i\ h$
$a\ d\ g - b\ e\ h - c\ f\ i$
$a\ e\ i - b\ f\ g - c\ d\ h$
$a\ f\ h - b\ d\ i - c\ e\ g$
$a\ g\ d - b\ h\ e - c\ i\ f$
$a\ h\ f - b\ i\ d - c\ g\ e$
$a\ i\ e - b\ g\ f - c\ h\ d$

Sans entrer dans le détail de la formation de ces types, observons qu'il est facile dans chaque cas particulier de déterminer le nombre de types réguliers de deux espèces, que nous venons de montrer (*).

La détermination du nombre total de tous les types, réguliers et irréguliers, présente des embarras presque inextricables, car la loi qui relie ce nombre à la quantité n est très difficile à découvrir et ce nombre croît très rapidement avec n.

Après avoir construit directement, par lignes, les types de $n = 3, 4, 5$ et 6, nous n'avons réussi à calculer le chiffre énorme des types de 7 lettres que grâce à des méthodes expéditives qui se présentent tout naturellement à l'esprit dans des recherches de ce genre et en vérifiant les résultats par la méthode des substitutions. En appelant T le nombre des types et en y joignant un indice indiquant le nombre de lettres, nous avons trouvé les résultats suivants :

$T_3 = 1; \quad T_4 = 4; \quad T_5 = 56; \quad T_6 = 9.408; \quad T_7 = 221.276.160$

et leurs rapports

$$\frac{T_4}{T_3} = 4 \qquad \frac{T_5}{T_4} = 14 \qquad \frac{T_6}{T_5} = 816 \qquad \frac{T_7}{T_6} = 23.520.$$

(*) Les carrés réguliers de la première espèce s'obtiennent aussi en appliquant successivement la même substitution circulaire d'abord à une permutation quelconque, puis à celle qui en dérive et ainsi de suite.

L'examen de la formation de ces chiffres nous a conduit à saisir entre eux, une relation curieuse, exprimée par la formule

$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = \left(\frac{T_{n-1}}{T_{n-2}}\right)^2 - \frac{T_{n-1}}{2}.$$

Cette formule permet de calculer le nombre de types pour n lettres lorsque l'on connaît déjà ce nombre pour 3, 4, 5... $(n - 1)$ lettres. Ainsi, ces nombres forment une série dont chaque terme se déduit de ceux qui le précèdent. Telle est, entre autres, la formule qui sert à calculer la somme des puissances des termes d'une progression arithmétique. Nous ne doutons pas que notre formule ne soit exacte pour des valeurs de n supérieures a 7, car nous ne voyons pas de raison plausible pour que la relation qu'elle exprime cesse subitement d'exister au delà de ce terme. Mais comme elle est établie par l'induction, il est nécessaire de l'appuyer par une démonstration rigoureuse, que nous espérons donner prochainement.

Observons que tandis que dans les types irréguliers on peut transposer toutes les lignes de toutes les manières, en obtenant chaque fois un carré différent des autres, on doit au contraire, dans les types réguliers, laisser au moins une ligne, horizontale ou verticale, sans transposition, car autrement on aurait obtenu des carrés identiques entre eux. C'est précisément cette considération qui nous a fait diviser les types en deux classes : types réguliers et types irréguliers, pour exposer successivement les propriétés des uns et des autres.

Cela étant dit, désignons par S_n le nombre de toutes les permutations carrées et par R_n le nombre des types réguliers; on a

$$S_n = (1 \times 2 \times 3 \ldots \times n)^2(T_n - R_n)$$
$$+ [1 \times 2 \times 3 \ldots \times (n - 1)](1 \times 2 \times 3 \ldots \times n)R_n;$$

ou bien, réductions faites,

$$S_n = (1 \times 2 \times 3 \ldots \times n)^2\left[T_n - \frac{n-1}{n} R_n\right]$$
$$= (P_n)^2\left[T_n - \frac{n-1}{n} R_n\right].$$

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

APPLICATION AUX ANAMORPHOSES CONIQUES,

Par M. **M. d'Ocagne.**

1. — La normale en M, à une courbe plane c, coupe en N la perpendiculaire élevée, en O, au rayon vecteur OM. Voyons comment la tangente, ou la normale, à la courbe k décrite par le point N est liée au centre de courbure de la courbe c (*).

Soit NI la normale à la courbe k (*fig. 1*). Elle rencontre en E la normale ΩE à la développée de c. Si ω et θ désignent les angles de OM et de MN avec un axe fixe quelconque du plan, on a pour les différentielles $d(\mathrm{M})$, $d(\mathrm{N})$ des arcs des courbes c et k, aux points M et N:

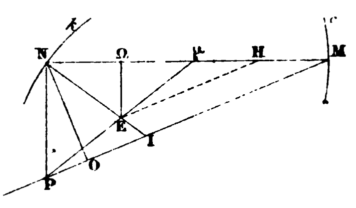


Fig. 1.

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{MN}.d\omega = \mathrm{M\Omega}.d\theta,$$
$$d(\mathrm{N}) = \mathrm{NI}.d\omega = \mathrm{NE}.d\theta.$$

D'où
$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M\Omega}} = \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NE}}.$$

Tirons EH parallèle à OM; nous avons
$$\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NH}} = \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NE}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M\Omega}}.$$

Donc
$$\mathrm{NH} = \Omega\mathrm{M},$$
ou
$$\mathrm{MH} = \Omega\mathrm{N}.$$

En N, élevons à MN la perpendiculaire NP qui coupe OM en P, et tirons PE qui coupe MN en μ. Nous avons
$$\frac{\mu\mathrm{N}}{\Omega\mathrm{N}} = \frac{\mu\mathrm{P}}{\mathrm{EP}} = \frac{\mu\mathrm{M}}{\mathrm{HM}}.$$

Par suite
$$\mu\mathrm{N} = \mathrm{M}\mu,$$
et μ est le milieu de MN. De là ce théorème :

(*) Cette question se rattache à celles que nous avons traitées en 1888 dans ce *Journal*, p. 74, 97, 121.

Théorème I. — *La normale à la courbe* k *et la normale à la développée de la courbe* c, *se coupent sur la médiane, issue de* P, *du triangle* MPN.

2. — Voici deux autres propositions qui résultent de théorèmes généraux que nous avons démontrés dans notre étude *sur l'enveloppe de certaines droites variables* (*Nouv. Ann.*, 1883 et 1886).

Le premier de ces théorèmes est le suivant (*N. A. M.*, 1883, p. 256).

Si la distance des points mobiles M *et* N *est vue, du point fixe* O, *sous un angle constant et que les tangentes en* M *et en* N *aux trajectoires de ces points se coupent en* T, Ω *étant le point où* MN *touche son enveloppe, les droites* OT *et* OΩ *sont isogonales par rapport à l'angle* MON.

Donc *(fig. 2)* :

Théorème II. — *La droite qui joint le pôle* O *au centre de courbure* Ω *est isogonale, par rapport à l'angle* MON, *de la droite qui joint le pôle* O *au point de rencontre des tangentes, en* M *et en* N, *aux courbes* c *et* k.

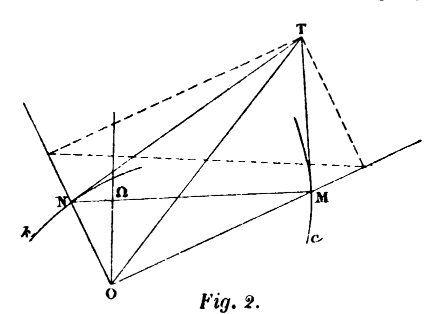


Fig. 2.

La droite OΩ est donc perpendiculaire sur celle qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées de T sur OM et ON.

Le second théorème que nous avons en vue est le suivant (*N. A. M.*, 1886, p. 94-95) :

Si les tangentes MM_1 *et* NN_1, *menées par les points mobiles* M *et* N *à une courbe fixe, font entre elles un angle constant; que les normales en* M *et en* M_1 *se coupent en* m *dont la projection sur* MN *est* m'; *que les normales en* N *et en* N_1 *se coupent en* n *dont la projection sur* MN *est* n' : *la parallèle à la tangente* MT *menée par* m' *et la parallèle à la tangente* NT *menée par* n' *se coupent sur la droite qui joint le point* T *au point* Ω *où* MN *touche son enveloppe.*

Dans le cas qui nous occupe, les points M_1 et N_1 se confondent avec le point O; les normales en M_1 et en N_1 avec ON et OM, les points *m* et *m'* avec le point N, et nous avons ce théorème *(fig. 3)* :

Théorème III. — *La normale en* N, *à la courbe* k, *coupant le vecteur* OM *en* n, *on abaisse de ce point la perpendiculaire* nn' *sur* MN. *La perpendiculaire menée, par* n', *à* Nn *et la perpendiculaire menée par* N *à* MN *se coupent en* L. *La droite* LT *passe par le centre de courbure* Ω.

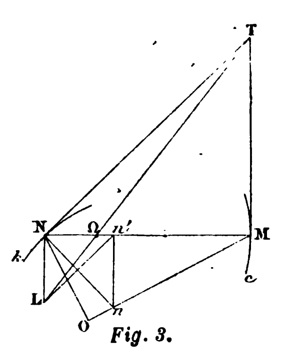


Fig. 3.

Les théorèmes I, II, III permettent de construire le centre de courbure Ω quand on connaît la normale en N à la courbe *k*; mais le théorème III ne permet pas, sans modification, comme les deux premiers, d'effectuer l'opération inverse. Cela lui constitue une infériorité vis-à-vis de ceux-ci. *(A suivre.)*

SUR UN PROBLÈME DE M. A. BOUTIN

Par M. **Aug. Poulain,** à Angers.

1. — M. Boutin a récemment publié un intéressant exercice (*J. S.*, 1889, p. 254), qui peut être traité par les coordonnées tripolaires, ce qui simplifie les résultats. La question se ramène à ce problème : *calculer les coordonnées normales* x, y, z *d'un point* M, *connaissant des quantités* p, q, r *proportionnelles à ses tripolaires*. Car, dans l'exercice cité, les cercles de similitude qui donnent M ont, par définition, pour équation (*)

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} = \frac{\nu}{r}.$$

(*) Inversement, chaque fois que l'on connaît les tripolaires λ, μ, ν d'un point M, et qu'on les *multiplie* par un facteur arbitraire *m*, les quantités

Prenons les formules (60) de la page 132 (*J. S*, 1889). En appelant $\frac{\sqrt{abc}}{m}$ les rapports égaux (1), nous aurons

(2) $$\frac{4Sam^2x}{abc} =$$
$$- a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 - (q^2 + r^2)bc \cos A + am^2 \cos A,$$
et m^2 est donné par l'équation

(3) $$m^4 - 2m^2\Sigma p^2a \cos A + \Sigma p^4a^2 - 2\Sigma q^2r^2bc \cos A = 0.$$

Désignons par $\frac{\Delta}{4R^2}$ le discriminant de (3), c'est-à-dire la quantité

(4) $$- \Sigma p^4a^2 \sin^2 A + 2\Sigma q^2r^2bc \sin B \sin C.$$

Nous aurons

(5) $$\Delta = - \Sigma p^4a^4 + 2\, \Sigma q^2r^2b^2c^2 =$$
$$(ap + bq + cr)(- ap + bq + cr)(ap - bq + cr)(ap + bq - cr),$$

(6) $$m^2 = \Sigma p^2a \cos A \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2R}.$$

$m\lambda$, ... sont les rayons de cercles qui ont pour centres A, B, C, et qui sont vus de M sous un même angle. La moitié de ce dernier a m pour sinus. De là un nouveau moyen, donné par les tripolaires, pour caractériser géométriquement un point. — Il y a encore un autre moyen : on peut regarder M comme le centre radical d'une infinité de systèmes de trois cercles, ayant A, B, C pour centres. Il suffit d'*ajouter* à λ^2, ... une constante n, positive ou négative, et de prendre pour carrés des rayons $\lambda'^2 = \lambda^2 + n, \ldots$; la puissance commune est $-n$. Ces systèmes de rayons, donnant des cercles *d'angle égal* ou *de puissance égale*, peuvent être regardés comme des systèmes de coordonnées. Les valeurs de x, y, z, en fonction de λ', μ', ν', sont les mêmes qu'en fonction de λ, μ, ν. Car l'élimination de ces dernières quantités fait disparaître n. — Troisième moyen : si l'on a les relations (1), M est l'un des deux points communs à trois cercles analogues à ceux d'Apollonius et que, pour abréger, nous appellerons les *cercles de rapport constant*, relatifs à M. Ils font le pendant des transversales angulaires, qui sont les droites de rapport constant (relativement à M et aux côtés). Il est évident que les trois centres sont sur une même droite, perpendiculaire au milieu de MM′, corde commune. Le premier cercle est représenté par $r^2\mu^2 - q^2\nu^2 = 0$, d'où l'on déduit facilement l'équation barycentrique Son centre est, en barycentriques, $o, r^2, -q^2$. La ligne des centres est donc définie par $\Sigma\alpha p^2 = 0$ (*J. S.*, 1887, p. 250). Elle est harmoniquement associée à $Q \equiv \alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{p^2} \ldots$ Le rayon du premier cercle est $R_a = \frac{aqr}{\pm (q^2 - r^2)}$. Si l'on remplace p^2, q^2, r^2 par leurs inverses, Q est remplacé par son réciproque, et les trois cercles, par leurs symétriques pris, par rapport aux médiatrices.

2. — On voit, *a priori*, que Δ s'annule quand **M** est sur le cercle circonscrit. On peut le prouver directement en montrant que $\Delta = 0$ représente ce cercle comme ligne double, si l'on y remplace p, q, r par les quantités proportionnelles λ, μ, ν. En effet, par cette substitution, m^2 devient égal a abc (**1**). On tire donc de (6)

$$\frac{\Delta}{4R^2} = (\Sigma p^2 a \cos A - abc)^2.$$

Or, entre parenthèses, on a le premier membre de l'équation du cercle circonscrit (*J. S.*, 1889, p. 6).

On peut aussi trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que Δ, x, y, z soient réels. Car on voit que $\sqrt{\Delta}$ est proportionnelle à la surface du triangle A'B'C' dont les côtés seraient ap, bq, cr. Or, on sait que, dans ce cas, la condition de réalité est que le triangle existe : la plus grande des quantités ap, bq, cr doit être moindre que la somme des deux autres.

3. — Si, comme cas particulier, p, q, r égalent les coordonnées λ, μ, ν d'un point M, il n'y a pas lieu de transformer les proportions qu'on tirerait de (**2**); car les deux valeurs de m sont connues, savoir :

$$m^2 = abc \quad \text{et} \quad m^2 = 2\Sigma a\lambda^2 \cos A - abc$$

(*J. S.*, 1889, p. 157).

Mais, dans le cas général, il est avantageux de remplacer m^2 par sa valeur. On arrive finalement à

$$(7) \quad \frac{4Sm^2x}{abc} = \frac{(-a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2)\sin A \pm \sqrt{\Delta}\cos A}{2R};$$

d'où

$$(8) \quad x = \frac{1}{2m^2}[(-a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2)\sin A \pm \sqrt{\Delta}\cos A], \ldots$$

4. *Vérification.* — Pour les centres isodynamiques, on a

$$\lambda^2 : \mu^2 : \nu^2 = \frac{1}{a^2} : \ldots, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}.$$

On retrouve donc les formules donnant les coordonnées de ces points :

$$(9) \qquad x : y : z = (\sin A \pm \sqrt{3}\cos A) : \ldots$$

Dans le cas des centres isologiques, on a

$$\lambda^2 : \mu^2 : \nu^2 = a^2 : b^2 : c^2;$$

et alors

(10) $$\Delta = (a^2 + b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$= 256\,S^4 \cot \omega \cot A \cot B \cot C,$$

ω étant l'angle de Brocard de ABC.

Il est facile d'en déduire les coordonnées des centres isologiques.

5. Si l'on a

$$-a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 = 0,$$

les points M et M' sont sur le cercle représenté par

$$-a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2 = 0.$$

Ce cercle a pour centre le pôle K_a de BC par rapport au cercle ABC, pôle dont les coordonnées barycentriques sont $(-a^2, b^2, c^2)$; il passe par B et C, comme orthogonal au cercle ABC. Δ devient alors carré parfait, et la valeur d'une coordonnée, x, se simplifie davantage encore. On a, en effet, $\Delta = 4b^2c^2q^2r^2$.

6. *Équation de la droite joignant les deux points* M, M' *définis par* (1). — De (1), nous tirons

(11) $$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{p^2 - q^2} = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{p^2 - r^2},$$

ou

(12) $$\Sigma\lambda^2(q^2 - r^2) = 0,$$

ou le déterminant

(13) $$|\,\lambda^2 \quad p^2 \quad 1\,| = 0.$$

Pour passer aux coordonnées barycentriques α, β, γ, prenons les formules suivantes (*J. S.*, 1889, p. 130), dans lesquelles $\alpha + \beta + \gamma = \sigma$:

(14) $$\sigma^2\lambda^2 = \sigma(b^2\gamma + c^2\beta) - \Sigma a^2\beta\gamma,$$

nous aurons

(15) $$\Sigma\alpha[c^2(r^2 - p^2) + b^2(p^2 - q^2)] = 0.$$

Le déterminant (13) donne, en ajoutant à la première colonne, multipliée par σ^2, la dernière multipliée par $\Sigma a^2\beta\gamma$:

(16) $$|\,b^2\gamma + c^2\beta \quad p^2 \quad 1\,| = 0.$$

7. *Points remarquables de la droite* MM'. — Les équations (11) et (12) sont vérifiées aussi bien par M' que par M; elles le

sont également par le centre O du cercle ABC, enfin, elles ne changent pas si l'on ajoute, à p^2, q^2, r^2 une même quantité n, positive ou négative. Par suite, la droite MM'O contient les points obtenus en remplaçant p^2, q^2, r^2 par leurs valeurs complémentaires et anticomplémentaires, c'est-à-dire par $q^2 + r^2$, ... ou par $q^2 + r^2 - p^2$; car ces quantités s'obtiennent en retranchant, de p^2, ... soit $p^2 + q^2 + r^2$, soit $\frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}$.

Sur (15) ou sur (16), on vérifie ces théorèmes connus que, pour les centres isodynamiques ou isologiques, MM'O passe par K ou par G. Plus généralement, si l'on prend

$$p^2 = b^2\gamma_1 + c^2\beta_1, \ldots,$$

MM'O passera par le point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

8.— Soit P_1 le point dont les coordonnées normales (x_1, y_1, z_1) ou les coordonnées barycentriques (α, β, γ) sont respectivement

(17) $\quad x_1 : y_1 : z_1 = \sin A(-a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2) : \ldots,$

ou $\quad \alpha : \beta : \gamma = a^2(-a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2) : \ldots$

Les relations (8) montrent que P_1 *est sur* MM'O *et qu'il est le conjugué harmonique de* O, *par rapport à* M *et* M'. Dans le cas des centres isodynamiques, P_1 coïncide avec K et le rapport des distances de M à O et K est $\frac{\operatorname{cotg} \omega}{\sqrt{3}}$ (*).

Ce point P_1 *est le centre radical du cercle* ABC *et des trois cercles* A, B, C, *analogues à ceux d'Apollonius* (cercles de rapport constant, relatifs à M). En effet, P_1 a la même puissance par rapport aux trois cercles A, B, C, puisqu'il se trouve sur leur axe radical commun MM'. Cette puissance est aussi la même par rapport au cercle ABC; car ce dernier étant orthogonal aux précédents, l'axe radical de ce cercle et du cercle A est la polaire de O par rapport à celui-ci; et cette

(*) Plus généralement, soient M_0, M_1, ..., des points en nombre quelconque, affectés de poids positifs ou négatifs m_0, m_1, ...; leur centre de gravité M a pour coordonnées normales $\frac{\Sigma m_0 x_0}{\Sigma m_0}$, $\frac{\Sigma m_0 y_0}{\Sigma m_0}$, $\frac{\Sigma m_0 z_0}{\Sigma m_0}$ et pour coordonnées barycentriques $\frac{\Sigma m_0 \alpha_0}{\Sigma m_0}$, ... pourvu que *les coordonnées* soient des *coordonnées absolues*. Dès lors, dans le cas des coordonnées relatives, ces formules donnent le centre de gravité correspondant à des poids $m_0 \Sigma \alpha_0$, $m_1 \Sigma \alpha_1$....

polaire coupe OMM′ au point P_1, conjugué harmonique de O par rapport à MM′

9. — Généralisant le mot créé par M. Neuberg, appelons *points isologiques d'ordre* n, les deux points O_n, O'_n tels que

$$\frac{\lambda}{a^n} = \frac{\mu}{b^n} = \frac{\nu}{c^n}. \tag{18}$$

Le lieu de ces points ne diffère, de la *potentielle triangulaire*, que par le changement de α, β, γ en λ, ...

On peut, de plusieurs manières, établir des rapports avec les potentiels. Désignons le potentiel d'ordre n par I_n; de la sorte, K (point de Lemoine) équivaut à I_2, et G équivaut à I_0. 1° Il est évident que de O_n on peut déduire le réciproque I'_n de I_n. Car, dans le triangle BCO_n, la bissectrice de l'angle au sommet partage la base BC dans le même rapport qu'une transversale angulaire de I'_n. Inversement, ayant I'_n, on peut construire pour l'autre point les cercles de rapport constant. 2° En remplaçant les bissectrices par les symédianes, on relie I'_n avec l'isologique d'ordre double; ce qui peut être généralisé. 3° Les points isologiques, d'ordre $\frac{1}{2}n - 1$, permettant d'obtenir le potentiel d'ordre n; et réciproquement. Car I_n se déduit facilement du point Q_n dont les coordonnées barycentriques sont

$$a^2(-a^n + b^n + c^n)..., \tag{19}$$

Or, en vertu de (8), on obtient Q_n en prenant $p^2 = a^{n-2}, ...$; Q_n *est sur la droite correspondante* OMM′, *et y est le conjugué harmonique de* O *par rapport à* MM′.

D'après cela: 1° Dans le cas de G, potentiel de degré 0, $Q_0 \equiv K$ est sur la ligne des isologiques du degré -2, c'est-à-dire des isodynamiques; 2° dans le cas du centre du cercle inscrit I, premier potentiel, son point Q_1 est sur la ligne des isologiques d'ordre $-\frac{1}{2}$, répondant à $p^2a = 1$; pour $I_2 \equiv K$, la construction de Q_2 est en défaut. Elle donne un résultat indéterminé, parce que les isologiques d'ordre 0 sont à l'infini et en O; 3° Pour I_3, ou $\alpha : \beta : \gamma = a^3 : b^3 : c^3$, Q_3 est sur la ligne des isologiques de degré $1/2$ répondant à $p^2 = a$; 4° *pour*

I_4 *ou* $\alpha : \beta : \gamma = a^4 : b^4 : c^4$, Q_4 *se trouve sur la ligne des isologiques ordinaires* O_1, O'_1 ceux qui répondent à $p^2 = a^2$, ...

10. — En développant le déterminant (16), on trouve

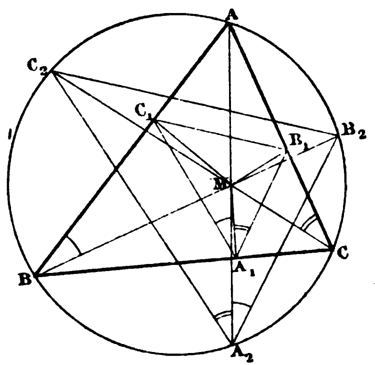
$$(20) \qquad \Sigma p^2[\alpha(b^2 - c^2) + a^2(\beta - \gamma)] = o.$$

Donc, pour le centre I du cercle inscrit, c'est-à-dire pour $\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$, la relation devient $\Sigma p^2 a(b - c) = o$. Elle est vérifiée pour $p^2 a = q^2 b = r^2 c$. La droite $MM'OQ_1$ passe alors par I. Pour K, la relation devient $\Sigma p^2 a^2(b^2 - c^2) = o$. Elle est vérifiée pour $p^2a^2(b + c) = q^2b^2(c + a) = r^2c^2(a + b)$ et MM'O passe par K.

11. *Triangle* A'B'C'. — Ce triangle, indiqué ci-dessus (**2**), est semblable aux triangles podaires de M et M'; car les côtés de ces derniers égalent

$\lambda \sin A, ...$

(*J. E.*, 1889, p. 269), et sont ainsi proportionnels à *ap*, *bq*, *cr*. Si nous prolongeons AM, BM, CM jusqu'au cercle circonscrit, en $A_2B_2C_2$, nous avons encore un triangle semblable à A'B'C' et au triangle podaire $A_1B_1C_1$. En effet, l'angle partiel $MA_1C_1 = MBC_1$ dans un quadrilatère birectangle, et MA_2B_2 a la même mesure que ce dernier. B_2 et B_1 sont ainsi des sommes d'angles égaux. On le voit encore en calculant B_2C_2, Soient $AM = \lambda_1$, $A_1M = \lambda_2 ...$; on a



$$(21) \qquad B_2C_2 = \frac{a\mu_2}{\nu},$$

$$(22) \qquad \mu\mu_2 = -\frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\sigma^2},$$

(*J. S.* 1889, p. 9). Donc

$$(23)\ (24) \quad B_2C_2 = \lambda a \frac{-\Sigma a^2\beta\gamma}{\lambda\mu\nu\sigma^2} = B_1C_1 \times \frac{2R}{\lambda\mu\nu} \times \frac{-\Sigma a^2\beta\gamma}{\sigma^2}.$$

Les sommets du triangle $A_2B_2C_2$ sont les transformés, par

rayons vecteurs réciproques, de A, B, C; M étant le centre d'inversion. Dans le cas des centres isodynamiques, les deux triangles précédents sont équilatéraux (*).

12. — Si l'on appelle S′ l'aire de A′B′C′, on a

$$\Delta = 16S'^2, \tag{25}$$

$$-a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 = 4S' \cot A'. \tag{26}$$

On en tire facilement le sinus et le cosinus de $A' = A_1$, angle du triangle podaire de M; puis une nouvelle expression des coordonnées de M et M′ :

$$x:y:z = (\sin A \cot A' \pm \cos A) : \ldots = \frac{\sin(A \pm A')}{\sin A} : \ldots, \tag{27}$$

ce qui donne les coordonnées d'un point M *en fonction des angles* A′, B′, C′ *de son triangle podaire.*

13. — Réciproquement : *deux points* M, M′ *sont associés tripolaires s'ils sont représentés par les formules* (8) *ou* (27), *pourvu, dans ce dernier cas, que* A′, B′, C′ *soient les trois angles d'un triangle quelconque* A′B′C′ *; de plus,* A′B′C′ *est semblable au triangle podaire* $A_1B_1C_1$.

En effet, considérons les deux points correspondant aux valeurs p^2, q^2, r^2. Ils sont représentés par (8). Donc ils coïncident avec M et M′. De même, la théorie des centres permanents de similitude nous apprend (*J. E.* 1886, p. 152) qu'il existe toujours un point, et un seul, dont le triangle podaire par rapport à ABC soit directement semblable à un triangle donné.

14. — *Inverses* M_1, M'_1, *de* M *et* M′. — Soient $AM = \lambda, \ldots$ $AM_1 = \lambda_1 \ldots$ les coordonnées tripolaires de M, M_1 et x, y, z, les coordonnées normales de M. Le calcul de $\lambda_1, \ldots$ montre que, pour deux points inverses M et M_1, on a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda x} = \frac{\mu_1}{\mu y} = \frac{\nu_1}{\nu z} = \frac{\Sigma ax}{\Sigma ayz}, \tag{28}$$

pourvu qu'on donne, à chaque rapport, une valeur positive. On vérifie facilement ces formules pour H et O, et pour les points

(*) Pour $A_1B_1C_1$ la proposition est de M. Boutin (*J. E.*, 1889, p. 102) ; pour $A_2B_2C_2$, elle est de M. Neuberg (*ibid.*, p. 212).

du cercle circonscrit. Cela donne, par là même, des valeurs $a\lambda_1, \ldots$ proportionnelles aux côtés du triangle podaire de M_1. On obtient ainsi $\lambda_1, \ldots$ pour les centres isogones et pour le point K.

15. — Si l'on circonscrit des cercles aux trois triangles formés par M et les côtés de ABC, leurs rayons sont inversement proportionnels à $\lambda x, \ldots$ et par suite à $\lambda_1, \ldots$ (*). Car, dans le triangle MBC, le produit de deux côtés égale la hauteur multipliée par le diamètre; d'où

$$R_a = \frac{\mu\nu}{2x}. \tag{29}$$

Donc inversement, si l'on connait des quantités proportionnelles aux trois rayons relatifs à M, on peut construire l'inverse M_1 de M.

EXERCICES

Par M. **A. Boutin.**

1. — *Soit un triangle* ABC, *décrit dans l'ordre des lettres. Par, un point* M *de son plan, on mène trois droites :* MA′ *parallèle à* AB MB′ *parallèle à* BC, MC′ *parallèle à* CA*;* A′, B′, C′ *étant situés sur les côtés* BC, CA, AB. *Par un autre point* M_1 *on mène* OA″, OB″, OC″ *respectivement parallèles à* AC, CB, BA, *en tournant en sens inverse. Démontrer que les points* M *et* M_1, *pour lesquels les deux sommes :*

$$\overline{MA'}^2 + \overline{MB'}^2 + \overline{MC'}^2,$$
$$\overline{M_1A''}^2 + \overline{M_1B''}^2 + \overline{M_1C''}^2,$$

sont minimums, sont les points de Brocard de ABC.

Soient x, y, z les coordonnées normales de M. On doit rendre minimum

$$\frac{x^2}{\sin^2 B} + \frac{y^2}{\sin^2 C} + \frac{z^2}{\sin^2 A}, \tag{1}$$

(*) Cf. M. Boutin (*J. S.* 1889, p. 242).

x, y, z vérifiant la relation

$$ax + by + cz = 2S.$$

La différentiation donne :

$$\frac{x\,dx}{\sin^2 B} + \frac{y\,dy}{\sin^2 C} + \frac{z\,dz}{\sin^2 A} = 0. \quad (2)$$

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0. \quad (3)$$

Deux des variables étant indépendantes, on déduira de (3) les rapports $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ par exemple; et, en substituant dans (2) on trouve les conditions du minimum.

2. — *On donne les longueurs de trois droites* $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$. *les orienter autour du point* O *de manière que la somme des carrés des côtés du triangle* ABC *soit maximum.*

Soient x, y, z les angles BOC, COA, AOB.

On cherche le maximum de

$$\alpha\beta \cos z + \beta\gamma \cos x + \alpha\gamma \cos y,$$

avec la condition $\quad x + y + z = 2\pi.$

La différentation donne

$$\beta\gamma \sin x\,dx + \alpha\gamma \sin y\,dy + \alpha\beta \sin z\,dz = 0.$$

$$dx + dy + dz = 0,$$

D'où, pour le maximum :

$$\frac{\sin x}{\alpha} = \frac{\sin y}{\beta} = \frac{\sin z}{\gamma},$$

relations qui sont vérifiées, quand O est le centre de gravité de ABC.

3. — *Dans les mêmes conditions, orienter les droites* OA, OB, OC *de manière que le périmètre du triangle* ABC *soit maximum.*

Il faut trouver le maximum de

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos z} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos y}$$
$$+ \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos x}.$$

Un calcul analogue au précédent donne, pour les conditions du maximum :

$$\frac{\sin x}{\alpha . BC} = \frac{\sin y}{\beta . AC} = \frac{\sin z}{\gamma . AB},$$

ce qui, d'après un théorème connu, prouve que le point O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

(A suivre.)

EXERCICES ÉCRITS

28. — On donne un cercle Γ et deux droites parallèles Δ, Δ′. Par un point M, mobile sur Δ′, on peut mener à Γ deux tangentes qui rencontrent Δ aux points A, B. De A, on peut mener à Γ une nouvelle tangente δ; et, de B, une autre tangente, δ′.

On demande le lieu décrit par I, point de concours des droites δ, δ′.

Note sur l'exercice 27.

1. — Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point M, $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0$, l'équation de Δ_m. Cherchons l'enveloppe de la droite dont l'équation est $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 0$, avec la condition $\frac{x_0}{x_1} + \frac{y_0}{y_1} + \frac{z_0}{z_1} = 0$. Je regarde x_0, y_0, z_0 comme fonctions d'un paramètre t.

On a $\frac{xx'_0}{x_0^2} + \frac{yy'_0}{y_0^2} + \frac{zz'_0}{z_0^2} = 0$ (1) avec $\frac{x'_0}{x_1} + \frac{y'_0}{y_1} + \frac{z'_0}{z_1} = 0$;

et, par suite, $\frac{x(x_0 + \lambda x'_0)}{x_0^2} + \frac{y(y_0 + \lambda y'_0)}{y_0^2} + \frac{z(z_0 + \lambda z'_0)}{z_0^2} = 0$ (2).

Éliminant x entre les équations (1) et (2), puis y, puis z, j'en déduis

$$\frac{x}{x_0^2(y_0 z'_0 - z_0 y'_0)} = \frac{y}{y_0^2(z_0 x'_0 - x_0 z'_0)} = \frac{z}{z_0^2(x_0 y'_0 - y_0 x'_0)}.$$

Mais on a $\frac{y_0 z'_0 - z_0 y'_0}{\frac{1}{x_1}} = \frac{z_0 x'_0 - x_0 z'_0}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_0 y'_0 - x'_0 y_0}{\frac{1}{z_1}}.$

Donc $\frac{xx_1}{x_0^2} = \frac{yy_1}{y_0^2} = \frac{zz_1}{z_0^2}$ | $\frac{x_0}{\sqrt{xx_1}} = \frac{y_0}{\pm\sqrt{yy_1}} = \frac{z_0}{\pm\sqrt{zz_1}}$

D'où, l'équation de l'enveloppe :

$$\sqrt{\frac{x}{x_1}} \pm \sqrt{\frac{y}{y_1}} \pm \sqrt{\frac{z}{z_1}} = 0$$

ou $$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} + \frac{z^2}{z_1^2} - 2\frac{y}{y_1}\cdot\frac{z}{z_1} - 2\frac{zx}{z_1 x_1} - 2\frac{xy}{x_1 y_1} = 0.$$

C'est l'équation de la conique I_m correspondant au point M. Ainsi aux points de concours des bissectrices correspondent les coniques dont les équations sont

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0, \\ x^2+y^2+z^2-2yz+2zx+2xy=0, \\ x^2+y^2+z^2+2yz-2zx+2xy=0, \\ x^2+y^2+z^2+2yz+2zx-2xy=0. \end{array}\right.$$

Au centre de gravité correspond la conique inscrite correspondant à l'équation

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz-2cazx-2abxy=0, \text{ etc.}$$

Si Δ_m tourne autour d'un point fixe, les coniques C_m restent tangentes à une quatrième droite (la polaire du point P). Donc le lieu de leurs centres est une droite.

2. — Soit x_1, y_1, z_1 les cordonnées du point M. Le lieu des pôles des droites passant par le point M a pour équation

$$\frac{x_1}{x}+\frac{y_1}{y}+\frac{z_1}{z}=0,$$

ou

$$\frac{yz}{y_1z_1}+\frac{zx}{z_1x_1}+\frac{xy}{x_1y_1}=0.$$

C'est l'équation de la conique C_m.

Des équations simultanées :

$$\frac{x^2}{x_1^2}+\frac{y^2}{y_1^2}+\frac{z^2}{z_1^2}-2\frac{yz}{y_1z_1}-\frac{2xz}{z_1x_1}-\frac{2xy}{x_1y_1}=0,$$

$$4\left(\frac{yz}{y_1z_1}+\frac{zx}{z_1x_1}+\frac{xy}{x_1y_1}\right)=0,$$

je déduis

$$\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}\right)^2=0.$$

Donc les deux coniques C_m et I_m sont bitangentes, la corde de contact étant Δ_m.

3. — La condition pour que I_m soit une parabole est $\delta=0$, en posant

$$\delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1^2} & -\frac{1}{x_1y_1} & -\frac{1}{z_1x_1} & a \\ -\frac{1}{x_1y_1} & \frac{1}{y_1^2} & -\frac{1}{y_1z_1} & b \\ -\frac{1}{z_1x_1} & -\frac{1}{y_1z_1} & \frac{1}{z_1^2} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant, on trouve

$$\delta=-\frac{8}{x_1^2y_1^2z_1^2}(bcy_1z_1+caz_1x_1+abx_1y_1).$$

Or, $bcyz+cazx+abxy=0$, est l'équation de la conique circonscrite C_g correspondant au centre de gravité G.

Pour la conique circonscrite C_m,

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x_1y_1} & \frac{1}{z_1x_1} & a \\ \frac{1}{x_1y_1} & 0 & \frac{1}{y_1z_1} & b \\ \frac{1}{z_1x_1} & \frac{1}{x_1y_1} & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

ou $\delta = \frac{1}{x_1^2y_1^2z_1^2}\left(a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2 - 2bcy_1z_1 - 2caz_1x_1 - 2abx_1y_1\right)$.

L'équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2abxy = 0,$$

est celle de la conique inscrite I_g correspondant au centre de gravité.

La polaire du centre de gravité étant la droite de l'infini [$ax + by + cz = 0$] les deux coniques I_g et C_g sont bitangentes à l'infini; donc elles sont homothétiques et concentriques.

4. — Le lieu des points M pour lesquels les coniques inscrites I_m sont des hyperboles équilatères s'obtient immédiatement. Son équation est

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2\cos A}{yz} + \frac{2\cos B}{zx} + \frac{2\cos C}{xy} = 0,$$

ou $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + 2xyz(x\cos A + y\cos B + z\cos C) = 0$.

Les trois sommets du triangle de référence sont des points doubles.

Le lieu des points M, pour lesquels les coniques circonscrites C_m sont des hyperboles équilatères, a pour équation

$$\frac{\cos A}{yz} + \frac{\cos B}{zx} + \frac{\cos C}{xy} = 0,$$

ou $x\cos A + y\cos B + z\cos C = 0$.

C'est la polaire du point de concours des hauteurs. Les coniques C_m correspondantes passent toutes par le point de concours des hauteurs. Le lieu de leurs centres est le cercle des neuf points du triangle de référence.

R. LEVAVASSEUR.

NOTA. — M. Baudran, élève au lycée de Rouen, nous a envoyé une solution de cet exercice, analogue à celle qui précède. Il y joint les remarques suivantes :

(a) D'après l'équation de Δ_m on voit que c'est la droite harmoniquement associée au point M.

(b) Si l'on applique à quelques points remarquables les résultats trouvés, on obtient les résultats suivants :

1° Le point de Lemoine est le pôle de la droite de Lemoine, par rapport au triangle.

2° La conique inscrite, correspondant à ce point, est l'ellipse de Brocard ;

3° La conique circonscrite qui lui correspond est le cercle circonscrit au triangle;

D'après cela, nous pouvons donc dire que l'ellipse de Brocard et le cercle circonscrit au triangle sont bitangents aux points imaginaires où la droite de Lemoine les rencontre.

Cette droite a donc le même pôle par rapport aux deux courbes.

Son pôle par rapport au cercle étant le point de Lemoine on peut dire que le pôle de la droite de Lemoine, par rapport à l'ellipse de Brocard, est le point de Lemoine.

(c) La conique circonscrite correspondant au centre de gravité est l'ellipse de Steiner; cette ellipse a son centre au point G, or la conique L_g a le même centre que cette ellipse, et elle passe par les pieds des médianes; c'est donc la conique centralement associée au point G.

Donc : la conique centralement associée au point G est inscrite dans le triangle et homothétique de l'ellipse de Steiner.

(d) La polaire de l'orthocentre est l'axe orthique du triangle, la conique inscrite correspondant à ce point est l'ellipse *(k)*.

(e) L'ellipse de Simmons est la conique inscrite correspondant au centre isogone.

(f) Enfin le point de Steiner a pour polaire la droite KH_0 qui joint le point de Lemoine au point réciproque de l'orthocentre et la conique inscrite correspondant à ce point est la parabole de Kiepert. Ainsi, les droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact de la parabole de Kiepert et des côtés opposés passent par le point de Steiner (*).

M. Balitrand, élève à l'École Polytechnique, nous a communiqué, de son côté, une solution de cet exercice, accompagnée de remarque diverses. Il élargit la question proposée par M. Levavasseur, en observant, avec raison, qu'elle doit être considérée comme le point de départ d'une étude sur la transformation dans laquelle on fait correspondre un point à une droite, ces éléments étant harmoniquement associés.

BIBLIOGRAPHIE

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1890 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : *Discours prononcés à l'inauguration de la statue de Le Verrier;* par MM. Fizeau, Mouchez et Tisserand. — *Sur la réunion du Comité international permanent pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel;* par M. Mouchez. — *Conférence générale de l'Association géodésique;* par M. H. Faye. — *Congrès de Photographie céleste;* par M. J. Janssen. — *Congrès international aéronautique et colombophile.* Discours de M. J. Janssen. — *Revue des principaux travaux du Bureau des Longitudes en 1889;* par le Secrétaire. In-18 de IX-794 pages, avec 2 cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1 franc 50.)

(*) Pour les dénominations diverses employées dans cette note, le lecteur doit se reporter à la notice bibliographique de M. Vigarié; notamment à la p. 58 du Journal (1889).

QUESTION 190

Solution par M. G. Leinekugel, élève au Lycée Charlemagne.

On considère deux points A, B *fixes. Un angle droit* uov *pivote autour d'un point fixe* O*; et l'on considère les deux paraboles* P, Q *qui passent par* A, B, *et ont pour axes* ou, ov.

Trouver le lieu décrit par les deux autres points communs à P *et* Q. *Examiner le cas où* O *est sur la perpendiculaire élevée au milieu de* AB.

Si AB a pour équation $y = c$; et si l, n désignent la somme et le produit des distances de A, B à la perpendiculaire abaissée de O sur AB, l'équation de l'une des paraboles P sera

(P) $(y-mx)^2-2m(lm-c)(my+x)+nm^2-c^2+2m^2c(lm-c)=0.$

L'équation de Q se déduira de celle de P en changeant m en $-\frac{1}{m}\cdot$ Pour obtenir le lieu des points communs à P et à Q, j'éliminerai m entre les équations de P et de Q. Ceci revient à exprimer que l'équation de P ordonnée par rapport à m

$$(1)\quad 2m^3(y-c)l + m^2[2(lx-cy)+2c^2-n-x^2] + 2m[y-c]x - (y^2-c^2) = 0$$

admet deux racines m_1, m_2 telles que

$$m_1.m_2 = -1.$$

Or, on a
$$m_1.m_2.m_3 = \frac{y+c}{2l},$$

d'où
$$m^3 = -\frac{y+c}{2l}.$$

En remplaçant m_3 par cette valeur, dans (1), on a

$$(y+c)[(y+c)^2(y-c) + (y+c)[x^2-2lx+n+2c(y-c)] + 4l(x+l)(y-c)] = 0.$$

Le facteur $y+c$, introduit par élimination, est à rejeter; car il correspond à l'hypothèse $m_3 = 0$.

Le lieu est donc une cubique Γ représentée par l'équation

$$(y+c)[x^2+y^2-2lx+n+2cy-3c^2] = 4l(c-y)(l+x).$$

Sous cette forme, on voit que Γ est une cubique circulaire,

admettant comme asymptote la droite symétrique de AB par rapport à O. Elle passe par A, B, ainsi que par le point dont les coordonnées sont $-c$, $-l$.

Dans le cas où O se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, on a $l = 0$; et la cubique se décompose en un cercle et une droite.

NOTA. — Autre solution par M. Doucet, élève au lycée Condorcet.

QUESTIONS PROPOSÉES

278. — Soit
$$f(x) = 0.$$
une équation ayant ses racines réelles et distinctes.

Démontrer que
$$f + A_1 f' + A_2 f'' + \dots + A_p f^{(p)} = 0,$$
a toutes ses racines, réelles et distinctes, si
$$z^p - A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-2} \dots + (-1)^p A_p = 0,$$
a ses racines réelles. *(G. L.)*

279. — Soit H une hyperbole équilatère. Ayant pris deux points A, B, sur H, on trace un cercle Δ ayant AB pour diamètre. Ce cercle Δ coupe H en deux points, C, D, différents des points A, B. Soit I le point de concours des droites AD, BC; J, celui des droites BC, AD.

Démontrer que IJ coupe les axes de H en deux points formant avec I, J une division isotomique.

(Nous rappelons que quatre points, situés en ligne droite, forment une division isotomique, lorsque le milieu du segment formé par les points moyens de la division coïncide avec le milieu du segment formé par les points extrêmes.)

(G. L.)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1314-2-90.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

APPLICATION AUX ANAMORPHOSES CONIQUES,

Par M. **M. d'Ocagne.**

(*Suite et fin*, voir p. 31.)

3. — Lorsque la courbe *c* est une *spirale d'Archimède*, de pôle O, la courbe *k* est un cercle de centre O. Appliquons alors le théorème I à la détermination du centre de courbure de la spirale d'Archimède. Il nous donne le résultat suivant :

Le centre de courbure Ω *est la projection, sur* MN, *du point où* ON *est coupée par la médiane, issue de* P, *du triangle* MPN.

Mais nous avons fait voir (*N. A. M.* 1883, p. 459) que *la droite* PΩ *est*, dans ce cas, *la symédiane issue de* P *du triangle* MPN. De là, une propriété de la symédiane dans le triangle rectangle, laquelle peut s'énoncer ainsi :

Le pied de la perpendiculaire abaissée sur un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, du point où la hauteur correspondant à l'hypoténuse est rencontrée par la médiane issue du sommet opposé, est le pied de la symédiane issue de ce sommet.

4. — Les théorèmes précédents donnent une solution élégante du problème des *anamorphoses coniques*, que nous avons déjà traité ailleurs (*N. A. M.*, 1880, p. 296) d'une façon un peu moins simple.

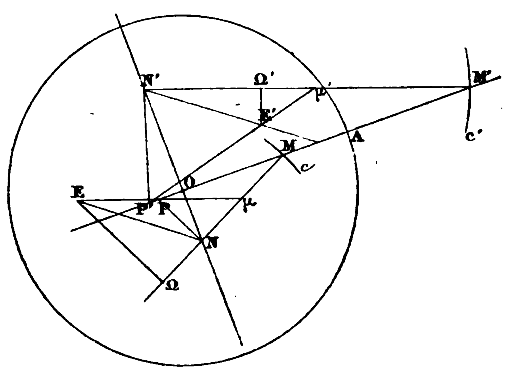


Fig. 4.

Ce problème peut s'énoncer ainsi :

Un miroir ayant la forme d'un cône droit de révolution repose.

par sa base, sur un plan. Tracer, sur ce plan, une courbe c′ *telle que son image, pour un œil situé à l'infini dans la direction de l'axe du miroir, soit une courbe donnée* c.

Soit M un point de la courbe donnée c (*fig. 4*), M′ le point correspondant de la courbe cherchée c'. Nous avons fait voir que les points M et M′, évidemment situés sur un même diamètre OMM′ de la base du cône, sont tels qu'en appelant A le point où OMM′ coupe le cercle C de base du cône, on a

$$\frac{MA}{AM'} = \cos \alpha,$$

α étant l'angle au sommet du cône.

Nous en avons déduit que les normales en M et M′, à c et à c', coupent la perpendiculaire élevée en O, à OM, en des points N et N′ tels que

$$(1) \qquad \frac{ON}{ON'} = - \cos \alpha.$$

Voyons maintenant comment le centre de courbure Ω′ se déduira du centre de courbure Ω.

L'application soit du théorème I, soit du théorème II, nous permet de déduire la normale ou la tangente à la courbe k décrite par N, du centre de courbure Ω. Mais l'égalité (1) montre que les courbes k et k', décrites par N et N′ sont homothétiques relativement au point O. Donc, la normale ou la tangente, en N′, à k', est parallèle à la normale où à la tangente en N, à k. Ayant ainsi cette normale ou cette tangente, l'application en sens inverse du même théorème, I ou II, permet d'en déduire le centre de courbure Ω′.

Ayant tracé les normales MN, M′N′, on élève en N et en N′ les perpendiculaires NP, N′P′ à ces normales; puis, on tire les médianes Pμ, P′μ' des triangles MPN, M′P′N′.

Si la perpendiculaire élevée, à MN, par le centre de courbure Ω coupe Pμ en E, et que la parallèle N′E′ à NE rencontre Pμ' en E′, le centre de courbure Ω′ est le pied de la perpendiculaire abaissée, de E′, sur M′N′.

Le tracé qui est représenté par la *fig. 4* est celui qui résulte de l'application du théorème I.

5. — Nous ferons, pour terminer, à propos des anamor-

phoses coniques, la remarque suivante, qui est assez importante :

L'anamorphose conique d'une courbe est, à un changement d'échelle près, identique à une conchoïde de cette courbe.

En effet, si ρ et ρ' sont les rayons vecteurs des points correspondants M et M' de la courbe c et de son anamorphose c', on a, d'après ce qui vient d'être dit, en appelant r le rayon du cercle de base du cône-miroir, et α son angle au sommet,

$$\frac{\rho' - r}{r - \rho} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

ou

$$\rho' = -\frac{\rho}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)r.$$

Considérons la courbe c_1 définie par

$$\rho_1 = -\frac{\rho}{\cos \alpha}.$$

Elle est homothétique à c, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{-1}{\cos \alpha}$, et puisque $\left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) r$ est constant, la courbe c' est conchoïde de celle-ci, relativement au pôle O.

Cela montre, en particulier, que l'anamorphose conique d'une droite est une conchoïde de Nicomède.

Inversement, on a

$$\rho = -\rho' \cos \alpha + (1 + \cos \alpha)r$$

et la courbe c est conchoïde de la courbe c_2 définie par

$$\rho_2 = -\rho' \cos \alpha,$$

laquelle est homothétique à c'. De là un procédé pour produire *optiquement* les conchoïdes.

Soit donnée la courbe c_2. Nous voulons obtenir la conchoïde c de celle-ci, définie par

$$\rho = \rho_2 + k.$$

Prenons un miroir conique d'angle solide α, et traçons sur le plan la courbe c' définie par

$$\rho' = -\frac{\rho_2}{\cos \alpha};$$

puis prenons pour rayon de base de notre miroir

$$r = \frac{k}{1 + \cos \alpha}.$$

Alors l'image de c' produite par le miroir, pour un œil situé à l'infini sur l'axe, sera précisément la conchoïde c. En pratique, on se placerait à une distance suffisamment grande pour que l'influence des parallaxes devînt négligeable.

Si l'on prend $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le changement d'échelle est supprimé.

THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE

Par M. **J. B. Pomey**, Ingénieur, ancien Élève de l'École Polytechnique.

Théorème. — *Une série à termes réels est convergente, si l'on peut déterminer le rang* n *d'un certain terme de cette série, de manière que la somme des* p *termes suivants reste inférieure, en valeur absolue, à un nombre donné quelconque* E, *pour toutes les valeurs entières positives de* p.

Je dis qu'on peut définir une manière particulière de faire croître p indéfiniment, de manière que la somme S_{n+p} des $n + p$ premiers termes de la série, tende vers une limite déterminée.

Imaginons que nous ayons porté, sur la droite OX, à partir du point O, comme origine, et dans un sens ou dans l'autre, suivant leur signe, les valeurs de S_{n+1}, $S_{n+2} \ldots$, $S_{n+p} \ldots$ Les extrémités de ces longueurs tomberont entre deux points A et B, dont la distance est au plus égale à 2ε. Divisons l'intervalle AB en k parties égales. Comme les quantités S_{n+1}, S_{n+2}, etc., sont en nombre infini, il y a au moins une des subdivisions de AB, qui comprend à son intérieur ou sur ses limites une infinité de valeurs de S_{n+p}. Soit A'B' l'un des nouveaux intervalles jouissant de cette propriété. Je le divise, à son tour, en k parties égales. Comme l'intervalle A'B' contient un nombre infini de valeurs de S_{n+p}, il y a au moins une de ces subdivisions qui comprend, à son intérieur, ou sur ses limites, une infinité de valeurs de S_{n+p}. En continuant ce procédé, on obtient une série d'intervalles successifs AB, A'B', A''B''..., dont chacun comprend le suivant et qui tendent vers zéro, parce que leurs longueurs décroissent

comme les termes d'une progression géométrique, de raison $\frac{1}{k}$. Les points A, A', A''..., B, B', B''... tendent donc vers une limite déterminée S. Maintenant; si, dans la suite S_{n+1}, S_{n+2}, etc., nous ne laissons subsister que les groupes de termes représentés par des longueurs terminées respectivement dans AB, A'B', A''B'', etc., nous arrivons à définir une certaine façon de faire croître p indéfiniment, de manière que S_{n+p} tende vers une limite S bien déterminée. Mais on ne voit pas encore d'impossibilité à ce que les longueurs représentatives de S_{n+1}, S_{n+2}, etc., se répartissent, en poussant assez loin le fractionnement de AB, en deux groupes comprenant un nombre infini de termes, dont les extrémités seraient respectivement situées, par exemple, dans deux segments non consécutifs de AB. Si une telle séparation était possible, S_n pourrait tendre vers deux limites distinctes, ou ne pas avoir de limite déterminée, suivant la manière dont on ferait tendre n vers l'infini. Mais, quelle que soit la loi suivant laquelle on fait tendre p vers l'infini, S_{n+p} tend vers la même limite.

En effet, supposons que p tende vers l'infini suivant la loi indiquée ci-dessus et que l'entier positif q tende vers l'infini suivant une autre loi. Alors, on peut déterminer m de manière à avoir :

$$S_{m+r} = S_m + \theta \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{matrix} |\theta| < 1 \\ (r = 1, 2, 3 \ldots \infty) \end{matrix}.$$

Or, pourvu que l'on ait :

$$n + p > m, \qquad n + q > m,$$

chose toujours possible, on pourra déterminer deux nombres r_1, r_2, tels que :

$$S_{m+r_1} = S_{n+p}, \qquad S_{m+r_2} = S_{n+q}.$$

A ces valeurs r_1 et r_2 de r correspondent les valeurs θ_1 et θ_2 de θ et on a

$$S_{n+q} - S_{n+p} = (\theta_2 - \theta_1) \frac{\varepsilon}{2},$$

ou $$S_{n+q} = S_{n+p} + \theta'\varepsilon \qquad \text{avec} \qquad |\theta'| < 1.$$

Mais, si je donne à ε une série de valeurs ε_1, ε_2, ε_3, etc., tendant vers zéro, on pourra prendre pour m une série de valeurs m_1, m_2, m_3, etc., tendant vers l'infini. Alors p et q ten-

dent aussi vers l'infini suivant leurs lois particulières et on a

$$\lim S_{n+q} = \lim S_{n+p} + \lim \theta'\varepsilon \qquad \lim S_{n+p} = S$$
$$\lim \theta'\varepsilon = \lim \theta' \times \lim \varepsilon = 0.$$

D'où : $$\lim S_{n+q} = S.$$ C. Q. F. D.

NOTE SUR LA KREUZCURVE

Par M. **Balitrand**, élève à l'École Polytechnique.

La détermination de la tangente à une courbe, que l'on sait construire point par point, est importante, non seulement parce qu'elle donne plus d'exactitude au tracé graphique mais encore parce qu'elle fournit des propriétés géométriques de la courbe, qui peuvent être intéressantes en elles-mêmes. Aussi n'est-il pas inutile de chercher plusieurs méthodes pour le tracé de cette tangente, et c'est ce que nous allons faire pour la Kreuzcurve.

1. On considère l'ellipse dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

et l'on mène la tangente au point M; elle coupe les axes de l'ellipse aux points A, B. Les parallèles aux axes menés par ces points se coupent en un point M_1, dont le lieu est la Kreuzcurve représentée par l'équation

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0.$$

Nous dirons que les points M et M_1 sont correspondants, si les coordonnées de M sont :

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi;$$

celles de M_1 seront :

$$x_1 = \frac{a}{\cos \varphi}; \qquad y_1 = \frac{b}{\sin \varphi}.$$

En un mot, les points M, M_1 se correspondent dans la transformation réciproque cartésienne (*).

(*) Voyez G. de Longchamps, *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*, p. 134.

2. Première construction de la tangente à la Kreuzcurve. — On trouve aisément, pour équation de la tangente en M_1, de la Kreuzcurve

$$(1)\qquad \frac{x}{a}\cos^3\varphi + \frac{y}{b}\sin^3\varphi - 1 = 0.$$

Elle passe par le point de rencontre des deux droites représentées par les équations

$$(2)\qquad \frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1,$$

$$(3)\qquad \frac{x}{a}\sin\varphi + \frac{y}{b}\cos\varphi = 0.$$

La première représente la tangente au point M à l'ellipse; l'autre, le diamètre conjugué de OM_1. Il suffit en effet, pour obtenir l'équation (1), de retrancher les équations précédentes après avoir multiplié la relation (3) par $\sin\varphi\cos\varphi$.

3. Seconde construction de la tangente. — La droite MM_1 a pour équation

$$(4)\qquad \frac{x}{a}\cos^3\varphi - \frac{y}{b}\sin^3\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 0.$$

On voit que la tangente au point M_1 est conjuguée harmonique de MM_1, par rapport aux droites MA, MB. Cette construction de la tangente est due à M. de Longchamps; elle conduit à quelques remarques intéressantes. D'un point P, pris sur la tangente en M, menons une seconde tangente à la Kreuzcurve. Soient M'_1 le point de contact, M′ le point correspondant sur l'ellipse, A′ et B′ les points où la tangente en M′ coupe les axes. Les points d'intersection des rayons homologues des deux faisceaux M_1 (ABMP), M'_1 (A′B′M′P) sont sur une conique contenant les points M_1 M'_1. Autrement dit, les points M_1, M'_1, P, et le point de rencontre des droites MM_1, $M'M'_1$ sont sur une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes.

Si l'on suppose que les points P, M_1' soient infiniment voisins de M_1, on arrive au théorème suivant:

L'hyperbole équilatère, osculatrice à la Kreuzcurve en un point M_1, *et ayant ses asymptotes parallèles aux axes, passe par le point de contact de la droite* MM_1 *avec son enveloppe.*

Si, par le point M, nous menons des parallèles aux axes, ces parallèles, la droite MM_1 et la parallèle à la tangente en M_1, à la Kreuzcurve, forment un faisceau harmonique. Il en résulte que le segment de la tangente en M_1 à la Kreuzcurve, compris entre ces parallèles, est divisé au point M_1 en deux parties égales. Par suite, il existe une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les parallèles aux axes, issues de M, et tangente, en M_1, à la Kreuzcurve. Cette hyperbole passe par l'origine, comme on le vérifie immédiatement.

Nous avons déduit l'existence de cette hyperbole de la construction de la tangente, due à M. de Longchamps. Mais, inversement, on peut démontrer l'existence de cette hyperbole et en déduire la construction de la tangente en M_1 à la Kreuzcurve. En effet l'hyperbole correspondant à l'équation

$$(x - a\cos\varphi)(y - b\sin\varphi) - ab\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

dont les asymptotes sont en évidence, passe par l'origine, par le point M_1, et admet, en ce point, même tangente que la Kreuzcurve.

4. — Construction du centre de courbure de la Kreuzcurve. — La considération de cette hyperbole équilatère, dont l'équation est

$$(5) \qquad xy - bx\sin\varphi - ay\cos\varphi = 0,$$

permet de déterminer le centre de courbure de la Kreuzcurve.

A cet effet, commençons par rappeler la formule

$$\rho = -(n-1)^2 \frac{\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{H},$$

qui donnne le rayon de courbure ρ d'une courbe de degré n dont l'équation est $f(x,y) = 0$; formule dans laquelle H désigne le Hessien de la fonction $f(x,y)$ rendue homogène.

Nous aurons pour la Kreuzcurve, en calculant les valeurs de $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ et H relatives au point M_1

$$\frac{df}{dx} = -\frac{2\cos^3\varphi}{a}, \quad \frac{df}{dy} = -\frac{2\sin^3\varphi}{b},$$

$$H = -\frac{6^3\sin^4\varphi\cos^4\varphi}{a^2b^2}.$$

Par suite, $$\rho_1 = \frac{(b^2 \cos^6 \varphi + a^2 \sin^6 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{3ab \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi}.$$

Pour l'hyperbole équilatère (5), nous trouvons :

$$\frac{df}{dx} = \frac{b \cos^2 \varphi}{\sin \varphi},$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

$$H = ab \sin \varphi \cos \varphi.$$

puis $$\rho = \frac{(b^2 \cos^6 \varphi + a^2 \sin^6 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{2ab \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi}.$$

Par suite, $$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, le rapport des rayons de courbure de la Kreuzcurve et de l'hyperbole équilatère est constant, et égal à $\frac{2}{3}$ (*).

Mais, d'autre part, dans l'hyperbole équilatère le diamètre du cercle de courbure en un point est égal au segment de la normale en ce point compris entre l'hyperbole. Dans le cas présent, comme on connaît les asymptotes de l'hyperbole, on en déduit immédiatement le diamètre de son cercle osculateur, et, en prenant les $\frac{2}{3}$ de ce diamètre, on a le diamètre du cercle osculateur en M_1 à la Kreuzcurve.

(*) Ce théorème est un cas particulier d'une propriété générale due à M. Jamet (*Annales de l'École normale supérieure*, 1887), et qui s'énonce de la manière suivante :

On considère la courbe plane triangulaire ayant pour équation

$$\left(\frac{x}{l}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{m}\right)^\alpha + \left(\frac{z}{n}\right)^\alpha = 0.$$

Par chaque point M *de cette courbe on peut faire passer une conique tangente à la courbe en ce point et circonscrite au triangle de référence ; le rapport des rayons de courbure de la conique et de la courbe est constant, quand* M *varie.*

Ce théorème permet, au moins théoriquement, de déterminer le rayon de courbure d'une foule de courbes connues : les cubiques unicursales ; les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion, et parmi celles-ci la lemniscate et la Kreuzcurve ; les courbes du quatrième ordre qui ont trois points de rebroussement, etc.

SUR TROIS THÉORÈMES DE BUDAN

Par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

I. — Premier théorème.

1. — Budan a publié de 1803 à 1830 divers travaux sur les équations algébriques. Un de ses théorèmes est devenu classique; il concerne les variations qui se perdent lorsqu'on substitue α et $\beta > \alpha$ dans la suite

$$\text{(A)} \qquad f(x), \quad \frac{f'(x)}{1}, \quad \frac{f''(x)}{1.2}, \ldots \frac{f^m(x)}{1.2\ldots m}.$$

Deux autres théorèmes, très utiles, sont tombés dans l'oubli. Nous nous proposons de les remettre en lumière, en les traduisant dans le langage actuel.

Il est inutile de rappeler l'énoncé du théorème I, dont nous venons de parler (voir les Algèbres de Serret et de Lefébure). Disons seulement que, dans le cas restreint où toutes les racines de $f(x) = 0$ sont réelles, la démonstration se déduit très facilement de la règle de Descartes, en prenant des transformées en $x - \alpha$ et $x - \beta$. Il n'en est plus de même dans le cas général. En 1811, Budan établit le théorème *dans toute sa généralité*, mais par une méthode qui n'a aucune analogie avec la démonstration moderne. Cette dernière est toute semblable à celle du théorème de Sturm, et c'est même à elle que Sturm doit l'invention de son théorème. Elle est due à Fourier, ce qui a conduit souvent à lui attribuer, par erreur, le théorème lui-même (*).

(*) Il est indubitable que la priorité du théorème appartient à Budan; car : 1° il l'énonça à l'Académie dès 1803, et c'est seulement dix-sept ans plus tard, en 1820, que Fourier publia sa démonstration, dans le Bulletin de la Société philomathique; 2° Fourier ne protesta jamais contre la Note VIII du Traité si célèbre de Lagrange (2° édition, 1808), où le théorème est attribué, avec de grands éloges, à Budan; 3° en 1811, la démonstration complète fut lue, par l'auteur, à l'Institut; Lagrange et Legendre firent un long rapport, inséré au *Moniteur*, où ils déclarèrent que « le théorème était nouveau ». Un tel témoignage suffirait. A moins de changer tous les usages scientifiques, il faut attribuer un théorème à celui qui l'a donné le premier.

2. — La même méthode conduit à un théorème plus général, c'est que : *on peut arrêter la suite* (A) *à la* n^ième^ *dérivée, pourvu que celle-ci ne s'annule pas dans l'intervalle considéré. Cela s'applique même aux fonctions transcendantes ou aux fonctions algébriques, pourvu qu'elles restent continues dans l'intervalle.* Cette dernière restriction tient à ce que le raisonnement suppose que les différentes fonctions passent nécessairement par zéro pour changer de signe (*).

II. — Second théorème de Budan (**). *(La suite collatérale. Les cercles limitatifs).*

3. — Lorsque, entre α et β, le nombre des variations perdues est pair, le premier théorème ne fait pas savoir s'il y a, dans cet intervalle, des racines réelles. S'il n'y en a pas, il ne servirait de rien de substituer indéfiniment des nombres intermédiaires, car toujours la perte continuerait à se faire par couples, ce qui maintiendrait sans cesse l'ambiguïté. De là, la nécessité d'un autre criterium.

L'idée qui a dirigé Budan consiste à appliquer le théorème, non plus à la proposée, mais à une de ses transformées. Jusque-là, rien que de très vulgaire. Mais il a su choisir sa transformée, et surtout il a précisé les conditions du succès. La conclusion de sa méthode (voir les deux corollaires) est que *toujours on finira par réussir, et qu'ordinairement ce sera très vite.* Toutefois, la méthode est en défaut dans un intervalle,

---

(*) On peut compléter le théorème I, de manière à augmenter son rendement. On sait que la règle de Newton abaisse la limite de Descartes, en disant de compter, non plus toutes les variations, mais seulement celles qu'on appelle *variations-permanences* (Voir nos articles dans le *J. S.* 1888). De même, la règle Newton-Sylvester dit de compter, dans la suite de Budan, non plus toutes les pertes de variations, mais seulement celles des *variations-permanences*. Cette règle est rapide.

(**) Ce théorème a été publié en 1807. Lagrange n'en fait pas mention dans sa Note VIII (édition de 1808); le théorème était trop récent. Delambre, Secrétaire de l'Académie, porta ce jugement sur la méthode : « elle est d'un degré de facilité qu'on n'osait espérer et qui sera difficilement surpassé ». — Nous renverrons, d'habitude, au principal ouvrage de l'auteur : *Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques*, par Fr. Budan de Boislaurent, Inspecteur général de l'Université. 2me édition. Paris. Bachelier, 1822.

s'il ne s'y rencontre que des racines égales. Mais le même inconvénient est attaché aux différentes méthodes de séparation et d'approximation des racines, sauf au théorème de Sturm, qui, en revanche, donne parfois des calculs interminables (*).

4. Définition. — Étant donnée $f(x) = 0$, Budan appelle *équation collatérale en* α la transformée en $y = \frac{1}{x - \alpha}$. On voit donc que, pour $\alpha = 0$, cette équation $\varphi(y) = 0$ n'est autre que l'équation aux inverses. Pour α quelconque, c'est l'équation aux inverses de la transformée en $x - \alpha$.

Cette dernière transformée est, d'après la formule de Taylor,

$$(1) \qquad f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)\frac{f'(\alpha)}{1} + \dots$$

Il est facile dès lors d'obtenir l'expression algébrique de $\varphi(y)$. C'est

$$(2) \qquad \varphi(y) = y^m f(\alpha) + y^{m-1}\frac{f'(\alpha)}{1} + \dots$$

Les coefficients sont toujours calculés d'avance, lorsqu'on forme la collatérale; car ce sont précisément les termes de la suite (A), qu'on a commencé par consulter.

On appellera *suite collatérale* de la suite (A), la nouvelle suite, analogue à (A) :

$$(B) \qquad \varphi(y), \quad \frac{\varphi'(y)}{1}, \quad \frac{\varphi''(y)}{1.2}, \dots$$

5. Lemme. — *La collatérale a autant de racines supérieures à* $\frac{1}{h}$ *que* $f(x) = 0$ *a de racines réelles comprises entre* α *et* $\alpha + h$.

Car si, dans l'expression de y, on fait varier x, de α à $\alpha + h$, y varie de $+\infty$ à $\frac{1}{h}$; et les deux équations sont vérifiées simultanément.

6. Corollaire. — *Quand la suite collatérale* (B) *ne renferme*

(*) Serret fait remarquer (*Algèbre*, p. 305), que l'équation (11) dont les coefficients sont très simples, puisqu'ils égalent tous ± 1, amène dans une des fonctions de Sturm un nombre de *quarante-quatre* chiffres.

pas de variations pour $y = \frac{1}{h}$, *la proposée n'a pas de racines réelles entre* α *et* $\beta = \alpha + h$. Car si la suite (B) n'a pas de variations pour $y = \frac{1}{h}$, l'équation collatérale qui l'a produite n'a pas de racines réelles supérieures à $\frac{1}{h}$, en vertu du théorème I, ou du théorème de Newton sur les limites des racines. Donc, d'après le lemme, la proposée n'a pas de racines entre α et $\alpha + h$.

7. Second théorème de Budan. — Réciproquement, *quand* $f(x) = 0$ *n'a pas de racines réelles entre* α *et* $\beta = \alpha + h$, *la suite collatérale ne renferme pas de variations pour* $y = \frac{1}{h}$, *pourvu que toutes les racines imaginaires de la proposée aient leurs points représentatifs extérieurs au cercle décrit sur le segment* $\beta - \alpha$ *comme diamètre.*

Nous donnerons à ces cercles le nom de *cercles limitatifs*.

Puisque $f(x) = 0$ n'a pas de racines réelles comprises entre α et $\alpha + h$, $\varphi(y) = 0$ n'a pas de racines réelles supérieures à $\frac{1}{h}$ (5). Par suite φ, sa transformée en $y - \frac{1}{h}$ ne peut avoir de racines positives. Cette transformée étant

$$(4) \qquad \varphi(y) = \varphi\left(\frac{1}{h}\right) + \left(y - \frac{1}{h}\right)\frac{\varphi'\left(\frac{1}{h}\right)}{1} + \cdots,$$

Les coefficients ne présentent pas de variations, sauf le cas exceptionnel mentionné dans l'énoncé.

En effet, puisqu'il n'y a pas de racines positives, les facteurs réels, du premier degré, que renferme cette équation, sont de la forme $\left(y - \frac{1}{h}\right) + A$, A étant positif. Ils sont associés à des facteurs de la forme $\left(y - \frac{1}{h}\right)^2 + P\left(y - \frac{1}{h}\right) + Q$, relatifs aux couples imaginaires. Q est donc positif. Quand P sera positif ou nul, le produit développé ne renfermera pas de variations. Mais il y aura doute, si P est négatif. Cherchons donc les conditions pour qu'on ait $P \geqslant 0$.

Soit $\lambda \pm i\mu$ un couple de racines imaginaires de $f(x) = 0$. Nous avons $x = \lambda \pm i\mu$. D'où

$$(5) \qquad y = \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{(\lambda - \alpha) \pm i\mu} = \frac{(\lambda - \alpha) \mp i\mu}{(\lambda - \alpha)^2 + \mu^2}.$$

De cette formule, on déduit $y - \frac{1}{h}$, dont la partie réelle est $\frac{(\lambda - \alpha)}{(\lambda - \alpha)^2 + \mu^2} - \frac{1}{h}$; dès lors la demi-somme des racines

$$(6) \qquad \frac{P}{2} = \frac{1}{h} - \frac{\lambda - \alpha}{(\lambda - \alpha)^2 + \mu^2}.$$

La condition $P \geqslant 0$ devient ainsi :

$$(7) \qquad (\lambda - \alpha)^2 + \mu^2 - h(\lambda - \alpha) \geqslant 0,$$

ou

$$(8) \qquad \mu^2 \geqslant (\lambda - \alpha)(h - \overline{\lambda - \alpha}).$$

Interprétons géométriquement cette inégalité. Une considération de moyenne proportionnelle montre que le cercle dont parle l'énoncé a pour équation

$$(9) \qquad Y^2 = (X - \alpha)(h - \overline{X - \alpha}).$$

L'inégalité (8) signifie donc que le point-racine (λ, μ) n'est pas intérieur au cercle.

Dès lors, si cette condition est remplie pour tous les points-racines, les coefficients P, P',... sont tous positifs, et le produit final des trinômes n'aura pas de variations.

On voit que cette condition suffisante est loin d'être nécessaire. En effet, supposons d'abord que P, P',... ne soient pas négatifs. Le résultat n'a pas de variations, ce qui se traduit par une suite d'inégalités. Celles-ci ne changent pas brusquement de sens quand certaines des quantités P, P',... varient d'une manière continue, pour devenir négatives. Cela revient à dire que certains points-racines peuvent souvent pénétrer dans le cercle limitatif, sans qu'il apparaisse de variations.

(A suivre.)

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES CUBIQUES

Par M. **E. Vigarié.**

Les indications qui suivent sont destinées à compléter celles que M. Boutin a données dans son article *Sur les cubiques remarquables du plan d'un triangle*. Nous ferons observer, à ce propos, que nous avions eu connaissance de la Note de M. Boutin quand nous lui avons communiqué les renseignements bibliographiques qu'il a signalés. Les résultats donnés par M. Boutin sont donc personnels et indépendants des travaux antérieurs.

Le problème V, traité par M. Boutin (*J. S.* 1889, p. 267), a été énoncé sous une forme à peu près identique par M. Lucas (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1876, p. 240, Question 1207) dans les termes suivants :

On joint les trois sommets A, B, C *d'un triangle à un point* P_1 *et l'on prend les intersections* A′, B′, C′ *des lignes de jonction avec les côtés opposés; trouver le lieu des points* P_1 *de telle sorte que les perpendiculaires élevées sur les côtés aux points* A′, B′, C′ *se coupent en un même point* P_2. *Ce lieu est une cubique dont il est facile de déterminer seize points et trois tangentes; construire les asymptotes et trouver aussi le lieu des points* P_2.

La solution que donna M. E. Dewulf de cette question (*N. A.* 1876, p. 550-555), est une belle application des méthodes de transformation, en Géométrie. M. Dewulf montra que le lieu des points P_1, qui, dans le langage proposé par M. Boutin, est la *cubique des réciproques*, relative au réciproque H_0 de l'orthocentre H_i contient les sommets du triangle, l'orthocentre, le centre de gravité G, les sommets A_1, B_1, C_1 du triangle anti-complémentaire de ABC, les pieds de AH_0, BH_0, CH_0, et les points d'intersection Γ, Γ_a, Γ_b, Γ_c, des droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit ou avec l'un des cercles exinscrits. De plus, les tangentes en A_1, B_1, C_1 sont les droites AA_1, BB_1, CC_1.

Pour la cubique, lieu des points P_2, qui, d'après M. Boutin,

est la *cubique des inverses* relative à l'anti-complémentaire H' de l'orthocentre H, M. Dewulf montre qu'elle renferme les sommets du triangle, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit O, les points à l'infini sur les médiatrices, les centres p, p', p'', p''' des cercles tangents aux trois côtés et les points H_A, H_B, H_C qui, sur le cercle circonscrit, sont diamétralement opposés aux sommets du triangle. Les trois asymptotes de la cubique sont les médiatrices du triangle.

La question de M. Lucas a été, en même temps, proposée par lui dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (tome II, 1876, p. 95, Question 83) et M. H. Van Aubel en a fait une étude approfondie.

Dans une Note *sur un lieu géométrique* (*N. C. M.*, tome IV, 1878, pp. 261-272), M. H. Van Aubel se propose de trouver *le lieu des points* P_2 *tels que les perpendiculaires* P_2A', P_2B', P_2C' *abaissées sur les trois côtés du triangle* ABC, *déterminent, sur ces côtés, trois points en involution*. C'est, on le voit, la seconde partie de la question de M. Lucas.

M. Van Aubel montre que le lieu du point P_2 est une cubique Γ ayant pour équation :

$$(y + z \cos A)(z + x \cos B)(x + y \cos C),$$
$$- (x + z \cos B)(y + x \cos C)(z + y \cos A) = o,$$

et qu'elle jouit de toutes les propriétés énoncées dans la solution de M. Dewulf. Il fait ensuite les remarques suivantes :

La cubique Γ a pour centre le centre O du cercle circonscrit; elle passe par le point H', symétrique de H par rapport à O, c'est-à-dire l'orthocentre du triangle $H_AH_BH_C$; par les pieds T, T', T'' des droites AH', BH', CH'.

La cubique Γ est sa propre inverse (en d'autres termes, elle est *anallagmatique*, dans la transformation par points inverses). Elle passe par le point H'_2, inverse de H', et les droites AH', BH', CH' sont tangentes à la cubique en A, B, C;

Les tangentes en H_A, H_B, H_C sont les droites qui joignent ces points au point S_1 symétrique de H'_2 par rapport à O : elles sont parallèles à AH', BH', CH'.

Les droites qui joignent le point H' aux centres des cercles tangents aux trois côtés, sont, en ces points, tangentes à la courbe;

Les droites symétriques des droites précédentes, par rapport à O, sont tangentes à la courbe en p_1, p'_1, p''_1, p'''_1;

Les tangentes en T, T', T'' concourent en un point σ qui appartient à la cubique; la tangente en H' passe par le point de concours H'_2 des tangentes en A, B, C;

La tangente en H'_2 passe par le point de concours σ des tangentes en T, T', T'';

Les droites T'T'', T''T, TT' rencontrent la cubique en U, U' U''; les droites AU, BU', CU'' sont les isogonales de $A\sigma$, $B\sigma$, $C\sigma$; les points U, U', U'' seront donc déterminés par les rencontres de $A\sigma$, $B\sigma$, $C\sigma$ avec T'T'', T''T, TT';

Les droites AU, BU', CU'' concourent sur la courbe au point σ_2 inverse de σ;

Les droites TU, T'U', T''U'' se coupent en H'_2.

Les droites p'T, p''T', p'''T'' concourent en un même point de la cubique : il en est de même des droites

$$H_AT, \quad H_BT' \quad H_CT'';$$
$$p'H_A, \quad p''H_B, \quad p'''H_C;$$
$$p'U, \quad p''U', \quad p'''U'';$$
$$Ap', \quad Bp''_1, \quad Cp'''_1, \quad \text{etc.}$$

En résumé, six triangles ABC, $H_AH_BH_C$, $p'p''p'''$, TT'T'', UU'U'', $T_1T'_1T''_1$ sont homologiques deux à deux, et les différents centres d'homologie font partie du lieu.

Les perpendiculaires menées des sommets de ces six triangles sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC concourent sur la cubique;

Les tangentes en U, U', U'' passent par un même point qui appartient à la courbe. M. Van Aubel termine l'étude de ce lieu géométrique par la considération de quelques coniques associées à la cubique et aux points que nous avons considérés : quelques-unes de ces dernières propriétés ont été indiquées par M. Dewulf, dans la solution que nous avons rappelée ci-dessus.

M. Van Aubel remarque enfin, que si l'on cherche *le lieu des points* P_2 *tels que les droites* P_2H_A, P_2H_B, P_2H_C *déterminent, sur les côtés du triangle, six segments en involution*, on est conduit à une équation qui est précisément celle de la cubique que nous venons d'étudier.

Revenant plus tard sur l'étude des cubiques, M. H. Van Aubel indiqua *Deux propriétés générales des courbes du troisième degré* (*N. C. M.* 1878, pp. 355-356). Ce travail fut bientôt suivi d'une Note plus générale *sur les courbes du troisième degré* (*N. C. M.*, 1879, pp. 81-87).

Les trois Mémoires de M. H. Van Aubel, que nous venons de signaler, peuvent être étendus aux cubiques en général; et l'on peut aisément, avec la nouvelle terminologie, énoncer un grand nombre de propositions intéressantes. Ce travail compléterait la Note de M. Boutin *Sur un groupe de cubiques remarquables du plan du triangle*, et donnerait un nouvel attrait à l'étude de ces courbes.

Antérieurement à MM. Lucas, Dewulf et Van Aubel, la *cubique des inverses*, dont nous venons de parler, a été rencontrée par M. H. R. Greer, dans une Note: *On the equation of a certain envelope.* (*Quarterly Journal*, tome VII, 1865-66, pp. 70-74). Dans cette Note, elle est considérée comme *le lieu des points tels, que les perpendiculaires élevées aux côtés du triangle, par les pieds des droites qui joignent ces points aux sommets du triangle, soient concourantes.* M. Greer donne l'équation de la cubique en coordonnées normales, sous une forme identique à celle que nous avons indiquée précédemment.

Enfin, la même cubique des inverses a été encore récemment rencontrée par M. M'Cay dans un Mémoire intitulé : *On three similar figures, with extension of Feuerbach's Theorem* (*Transactions of the Royal Irish Academy, vol.* XXIX, *part* X, pp. 303-320. *Juin* 1889). M. M'Cay l'a trouvée en cherchant le lieu des foyers F, F′ d'une conique inscrite au triangle de référence, et telle que la droite FF′ passe par le centre O du cercle circonscrit. Le savant Géomètre anglais montre que cette cubique est le lieu des points de contact des tangentes issues du point O aux hyperboles équilatères passant par les centres des cercles tangents aux côtés. M. M'Cay remarque, en outre, que le lieu du point P, milieu de FF′, est une autre cubique ayant O pour point double.

Les renseignements qui précèdent suffiront, pensons-nous, pour montrer l'intérêt qui s'attache aux cubiques remarquables du plan du triangle.

Nota. — Sur le même sujet M. A. Boutin nous adresse les observations suivantes.

On peut se proposer de chercher toutes les cubiques qui sont leur propre transformée par points inverses. On trouve, outre le groupe des cubiques des inverses, relatives à un point donné, un second groupe dont l'équation générale est :

(1) $Ax(y^2 + z^2) + A'y(x^2 + z^2) + A''z(x^2 + y^2) + Bxyz = 0.$

(Il y aurait lieu de chercher l'enveloppe de la droite qui joint deux points inverses situés sur cette cubique.)

J'ai remarqué (*J. S.* 1889, p. 266) que le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites rentrait dans le groupe précédent. Pour éviter toute ambiguité, cherchons ce lieu, en prenant pour triangle de référence trois des tangentes; ce qui, je crois, n'a pas été fait. M. Salmon ne fixe pas le triangle de référence, et M. Kœlher (*) prend le triangle formé par les trois diagonalesdu quadrilatère complet des quatre tangentes.

Considérons la droite correspondant à l'équation :

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0,$$

constituant avec les côtés du triangle les quatre tangentes considérées. Soient (x, y, z) (x_2, y_2, z_2) les coordonnées normales des deux foyers. Le produit de leurs distances aux quatre tangentes étant constant, on a :

$$xx_2 = yy_2 = zz_2 = \frac{\left(\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{z_2}{z_1}\right)}{\Sigma \frac{1}{x_1^2} - \Sigma \frac{2 \cos A}{y_1 z_1}} = k^2.$$

L'équation du lieu s'obtient par l'élimination de x_2, y_2, z_2, k^2. On trouve :

$$\Sigma x x_1(y^2 + z^2) + 2xyz\, \Sigma x_1 \cos A = 0.$$

Ce lieu rentre donc dans le second groupe (1) des cubiques qui sont à elles-mêmes leurs transformées par points inverses.

Toutes les cubiques des inverses, relatives à un point donné, peuvent encore s'obtenir par le théorème suivant :

Le lieu géométrique des tangentes menées par le point M *à toutes les coniques circonscrites au triangle de référence et passant en*

(*) *Exercices de Géométrie analytique*, t. I, 1886, pp. 318-319.

outre par le point M_2, *inverse de* M_0, *est la cubique des inverses, relative au point* M_2.

Soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) les coordonnées normales d'un point du lieu et de M. On a :

$$Ayz + Bxz + Cxy = 0, \tag{2}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0. \tag{3}$$

La condition pour que la tangente en (x, y, z) passe au point M, est

$$\Sigma\, x_1 (Bz + Cy) = 0,$$

ou

$$\Sigma\, A (zy_1 + z_1 y) = 0. \tag{4}$$

L'équation du lieu est le résultat de l'élimination de A, B, C entre (2) (3) (4). Savoir :

$$\begin{vmatrix} yz_1 + zy_1 & zx_1 + xz_1 & xy_1 + yx_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est réductible à

$$\Sigma\, \frac{x}{x'} (y^2 - z^2) = 0.$$

La transformation homographique, instantanée, de M. de Longchamps, montre que le théorème précédent subsiste en remplaçant M_2 par M_1 et le mot *inverse* par le mot *réciproque*.

Un certain nombre de cubiques du groupe des inverses ou du groupe des réciproques peuvent se retrouver de diverses manières. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les propositions suivantes :

Le lieu géométrique des points M, *tels que les droites qui leur sont harmoniquement associées soient perpendiculaires à* OM *(*O *centre du cercle circonscrit) est la cubique des inverses, relative au centre de gravité, ou cubique des dix-sept points.*

Si l'on substitue à O, un point quelconque P, on trouve pour l'équation du lieu : (x_1, y_1, z_1) étant les coordonnées de P.

$$\Sigma x[z^2(y_1 \cos C + x_1) - y^2(z_1 \cos B + x_1)] = 0,$$

qui ne rentre dans le groupe des cubiques des inverses, relatives à un point donné, que si P coïncide avec O.

Soient : M *un certain point,* μ *la droite qui lui est harmoniquement associée,* μ_2 *la transversale inverse de* μ. *Le lieu des points* M, *tels*

que μ, μ_2 *soient parallèles, est la cubique des inverses relative au point de Lemoine.*

Dans les mêmes conditions, le lieu des points M *tels que* μ, μ_2 *soient perpendiculaires, est la cubique correspondant à l'équation :*

$$3xyz - \Sigma \cos Ax(y^2 + z^2) = 0,$$

qui rentre dans le second groupe des cubiques qui sont leur transformées par points inverses.

Le lieu des centres des coniques inscrites au triangle de référence et telles que les normales aux points de contact soient concourantes, est la cubique des inverses, relative au centre de gravité.

Si μ *est la droite harmoniquement associée à* M, *la transformée par points inverses de* μ *est une conique circonscrite au triangle. Le lieu de* M, *quand les normales aux sommets du triangle sont concourantes est la cubique des inverses relatives au centre de gravité.*

On sait (Voir *J. S.* 1889, p. 268) que, dans ce cas, le lieu du point de concours des normales est la cubique des inverses, relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.

Le lieu du point harmoniquement associé aux droites de Simson a pour équation

$$\Sigma\alpha \operatorname{cotg} A\, (\gamma - \beta)^2 = 0.$$

Ce lieu rentre dans le second groupe des cubiques qui sont leur propres transformées par points réciproques.

On considère un point M *du plan d'un triangle* ABC; *les droites* AM, BM, CM *rencontrent la circonférence circonscrite, en* A_1, B_1, C_1. *On projette* A_1 *en* a_1 *sur* BC, B_1 *en* b_1 *sur* CA, C_1 *en* c_1 *sur* AB. *Le lieu des points* M, *tels que les droites* Aa_1, Bb_1, Cc_1 *soient concourantes, est la cubique des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.*

Cette remarque fournit un nouveau mode de génération de cette cubique si remarquable.

EXERCICES ÉCRITS

29. — D'un point M on mène les normales à une parabole P :

1° Trouver le lieu de M, sachant qu'elles forment un faisceau harmonique avec le diamètre correspondant au point M;

2° Trouver le lieu décrit par le centre de gravité du triangle formé par les points où les normales considérées rencontrent obliquement la parabole donnée.

Note sur l'exercice 28,

Prenons pour axe des x le diamètre de Γ, perpendiculaire aux droites Δ, Δ'; et, pour axe des y, la droite Δ.

L'équation de Γ étant

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

Le faisceau des tangentes issues de I (α, β) est représenté par

(1) $(x^2 + y^2 - 2ax + c)(\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha + c) = \left\{ x(\alpha - a) + \beta y - a\alpha + c \right\}^2.$

Soient a', λ (λ paramètre variable) les coordonnées de M. On peut écrire l'équation du faisceau des tangentes issues de M et Γ; puis, en faisant $x = 0$, dans cette équation et dans (1), on a

$$(y^2 + c)(\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha + c) = (\beta y - a\alpha + c)^2,$$
$$(y^2 + c)(a'^2 + \lambda^2 - 2aa' + c) = (\lambda y - aa' + c)^2.$$

Ces équations peuvent s'écrire sous les deux formes :

$$(y^2 + c)\left\{ 1 + \frac{\alpha^2 - 2a\alpha + c}{\beta^2} \right\} = \left(y - \frac{a\alpha - c}{\beta}\right)^2,$$
$$(y^2 + c)\left\{ 1 + \frac{a'^2 - 2aa' + c}{\lambda^2} \right\} = \left(y - \frac{aa' - c}{\lambda}\right)^2.$$

Elles doivent être identiques ; cette identité a lieu si l'on a

$$\frac{\alpha^2 - 2a^2 + c}{\beta^2} = \frac{a'^2 - 2aa' + c}{\lambda^2}, \quad \text{avec} \quad \frac{a\alpha - c}{\beta} = \frac{a\alpha' - c}{\lambda}.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on trouve (abstraction faite de Δ' qui est une solution singulière) pour le lieu cherché, une droite parallèle aux droites Δ, Δ' correspondant à l'équation :

$$x = \frac{a'c}{2aa' - c}.$$

Il est facile de reconnaître ces résultats par des considérations géométriques très élémentaires et de généraliser la question, en faisant la perspective de la figure proposée; comme l'a observé M. Sarfati, du lycée d'Alger, dans la solution géométrique qu'il nous a envoyée.

Nota. — Cet exercice a été résolu par MM. Baudran, élève au lycée de Rouen; et Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun.

ERRATA ET RECTIFICATIONS

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE DU TRIANGLE)

1887.

Page,	ligne.	*Au lieu de :*	*Lisez :*
39	-6(*)	droite	conique
59	-2	40	70
59	-5	1887	1888
61	-7	1886	1866
131	22	N	M
155	12	M_a, M_b, M_c	$M_a M_b M_c$
156	7	M_δ	M_ρ
156	8	M_ρ	M_δ
217	»	Supprimer la note qui est au bas de la page.	
219	6	milieux du	milieux des diagonales du

1888.

Page,	ligne.	*Au lieu de :*	*Lisez :*
11	-2	1883	1888
12	2	symédianes	symédianes des triangles BGC, CGA, AGB
12	4	$\sqrt{\frac{x}{\sin A}}+\sqrt{\frac{y}{\sin B}}+\sqrt{\frac{z}{\sin C}}=0$	$\sqrt{\frac{xm_a^2}{a}}+\sqrt{\frac{ym_b^2}{b}}+\sqrt{\frac{zm_c^2}{c}}=0$ m_a, m_b, m_c désignant les médianes du triangle.
12	-2	p.)	p. 57)
58	9	$\overline{\Omega_2 A}^2=\frac{b^2c}{m^2}\ldots$ etc.	$\Omega_2 A=\frac{b^2c}{n^2}\ldots$ etc.
58	10	$\overline{\Omega_1 A}^2=\frac{c^2b}{m^2}\ldots$ etc.	$\Omega_1 A=\frac{c^2b}{n^2}\ldots$ etc.
58	12	$\Omega_1\Omega_2=\frac{2R}{\sin\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}}=\frac{2R}{\sin\omega\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\omega}}$	$\Omega_1\Omega_2=2R\sin\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}=2R\sin 2\omega\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\omega}$
61	16	$O\Omega_1\Omega_2K$	$O\Omega_1\Omega_2K$
102	-10	I	Ic
202	8	cotg 50°	cotg 60°
277	7	$\frac{z}{\sin C}=0$	$\frac{z}{\sin C}$

(*) Le signe -, indique que les lignes sont comptées en *remontant*.

1889.

Page, ligne.		*Au lieu de :*	*Lisez :*
18	14	z	r
18	17	z_a, z_b, z_c	r_a, r_b, r_c
28	10	cercle	triangle
56	3	$x\ y$	$\alpha\ \beta$

QUESTIONS PROPOSÉES

280. — Soit BB′ le petit axe d'une ellipse Γ; du point B, abstraction faite de BB′, on peut mener à Γ deux normales. Soit C le pied d'une de ces normales.

En désignant par F l'un des foyers de Γ, la perpendiculaire élevée en F à BF rencontre la tangente, en B, en un certain point D.

Démontrer que BD = BC. *(G. L.)*

281. — La tangente et la normale, en chaque point d'une conique à centre, sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe par ce point, par le point diamétralement opposé et par les deux foyers. Démontrer géométriquement cette proposition. *(A. Tissot.)*

Nous avons le regret d'annoncer à nos lecteurs que M. Lévy cesse de faire partie de la direction du Journal auquel il continuera d'apporter le concours de sa collaboration.

Erratum. — P. 39, ligne 6, en remontant, *au lieu de :* λ_1, A_1, M, *lisez :* λ, A_2 M.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 4352-3-90.

SUR UN CAS D'INTERSECTION DE DEUX TORES

Par M. **P.-H. Schoute.**

Dans l'excellent ouvrage de M. E. Jurisch, intitulé *Questions de Géométrie descriptive*, qui contient les solutions de soixante-dix problèmes sur l'intersection de deux surfaces, on trouve le problème suivant :

On donne, dans un plan, un cercle Z *et deux droites* OA *et* OB, *qui se coupent en* O. *On fait tourner* Z *autour de* OA, *puis autour de* OB. *Trouver la projection de l'intersection de ces deux surfaces sur le plan* AOB. *(Concours d'admission à l'École polytechnique,* 1881. — *Examen oral.)*

Dans la solution, l'auteur ne remarque pas la nature simple de cette projection, laquelle est une ellipse concentrique à Z. Nous nous proposons, dans cette Note, de combler cette lacune. Nous y rattachons, en terminant, quelques remarques relatives au système des quadriques qui rencontrent un tore donné, suivant deux quartiques gauches.

1. — Démontrons d'abord que la projection en question est une conique. L'intersection totale des deux tores est une courbe gauche, du seizième ordre, qui se compose du cercle imaginaire à l'infini, commun à toutes les sphères, compté quatre fois, du cercle de contact Z des deux surfaces, compté deux fois et d'une courbe gauche du quatrième ordre. Cette dernière courbe étant symétrique par rapport au plan AOB, se projette sur ce plan suivant une conique.

2. — Cherchons l'équation de la conique en question. Représentons respectivement par d, r, α et β la longueur OM, le rayon de Z et les angles MOA et MOB *(fig. 1)*. Par rapport aux axes $y'Ox'$, l'équation de Z est

$$(x' - d\cos\alpha)^2 + (y' - d\sin\alpha)^2 = r^2.$$

Remplaçant y' par $\sqrt{y'^2 + z^2}$, on trouve, pour l'équation du tore dont OA est l'axe :

$$(x'^2 + y'^2 + z^2 - 2dx'\cos\alpha + d^2 - r^2)^2 = 4d^2(y'^2 + z^2)\sin^2\alpha,$$

ou

$$(x'^2 + y'^2 + z^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d(x'^2 + y'^2 + z^2 + d^2 - r^2)x'\cos\alpha$$
$$= 4d^2\left\{(x'^2 + y'^2 + z^2)\sin^2\alpha - x'^2\right\}.$$

En transformant cette équation, de façon à rapporter la surface aux axes yox, au moyen des relations

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \text{ et } x' = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

on obtient

$$u^4 - 4u^2d(y\cos\alpha + x\sin\alpha)\cos\alpha = 4d^2\left\{z^2\sin^2\alpha - y^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2xy\sin\alpha\cos\alpha\right\},$$

équation où l'on a posé

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + d^2 - r^2 = u^2.$

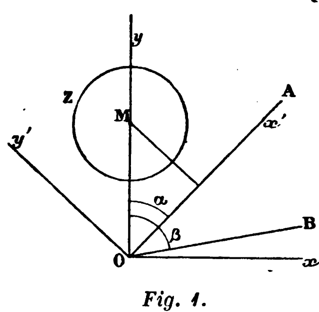


Fig. 1.

Donc, les deux tores sont représentés par les équations

$$(2)\ \begin{cases} u^4 - 2u^2dy - 2d^2z^2 \\ = 2d\left\{(u^2y - 2dy^2 - dz^2)\cos 2\alpha + x(u^2 - 2dy)\sin 2\alpha\right\}, \\ u^4 - 2u^2dy - 2d^2z^2 \\ = 2d\left\{(u^2y - 2dy^2 - dz^2)\cos 2\beta + x(u^2 - 2dy)\sin 2\beta\right\}. \end{cases}$$

Elles donnent par soustraction

(3) $x(u^2 - 2dy) = (u^2y - 2dy^2 - dz^2)\operatorname{tg}(\alpha + \beta).$

Si l'on fait

(4) $$x^2 + (y - d)^2 - r^2 = t^2$$

la relation (3) devient, eu égard à (1),

(5) $$z^2 = \frac{y\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - x}{x - (y-d)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\,t^2.$$

La substitution de cette valeur de z^2 dans l'une des équations (2) fait connaître l'équation de la projection.

On trouve, successivement :

$$u^2y - 2dy^2 - dz^2 = \frac{dx}{x - (y-d)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\,t^2,$$

$$u^2 - 2dy = \frac{d\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{x - (y-d)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\,t^2,$$

$$u^4 - 2u^2\,dy - 2d^2z^2 = u^2(u^2\ 2dy) - 2d^2z^2$$

$$= \frac{d^2\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}{\left\{x - (y-d)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\right\}^2}\,t^4 + \frac{2d^2x}{x - (y-d)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\,t^2.$$

Finalement, après division par $\dfrac{d^2t^2}{\{x - (y - d) \operatorname{tg} (\alpha + \beta)\}^2}$, on a

$$(6) \qquad \{x^2 + (y - d)^2 - r^2\} \sin^2 (\alpha + \beta)$$
$$= 4x \sin \alpha \sin \beta \{x \cos (\alpha + \beta) - (y - d) \sin (\alpha + \beta)\}.$$

La divisibilité par t^2 démontre que le cercle Z fait partie de la projection. La courbe restante (6) est toujours une ellipse. En effet, si l'on met son équation sous la forme

$$0 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots,$$

on trouve

$$A = \sin^2 (\alpha + \beta) - 4 \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta),$$
$$B = - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta),$$
$$C = \sin^2 (\alpha + \beta);$$

et l'on a $\quad B^2 - AC = - \sin^2 (\alpha - \beta) \sin^2 (\alpha + \beta).$

3. — L'ellipse (6) rencontre la circonférence Z en quatre points situés sur les droites correspondant aux équations

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = (y - d) \operatorname{tg} (\alpha + \beta),$$

lesquelles représentent deux diamètres du cercle. Ainsi, M est le centre de l'ellipse. Les axes de l'ellipse sont les bissectrices de l'angle formé par ces deux diamètres. D'après l'équation de la seconde droite MO' (*fig.* 2), l'angle yMO' est égal à $\alpha + \beta$. Donc, la bissectrice MP de l'angle O'MO est perpendiculaire à la bissectrice OP de l'angle AOB. On trouve sans peine que les longueurs des demi-axes suivant MP et MQ sont

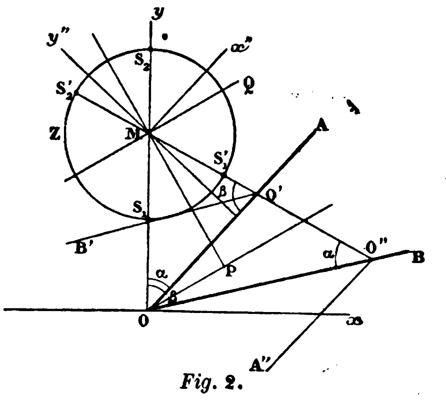


Fig. 2.

$$r \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}, \qquad r \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Ainsi la forme de l'ellipse et sa position par rapport au cercle Z ne dépendent nullement de la distance OM. En d'autres termes, quand on déplace O dans la direction MO, le lieu de la courbe d'intersection des deux tores est un cylindre elliptique.

4. — On obtient la même ellipse en cherchant l'intersection du tore OA et d'un troisième tore O'B' engendré par la rotation de Z autour de la droite O'B' menée par O' parallèlement à OB. En effet, la nouvelle ellipse passe pas S'_1, S'_2, et ses axes sont les droites MP, MQ, parallèles aux bissectrices de l'angle OO'B'. De plus, en changeant le sens des angles α et β, α et β sont remplacés par β et α, etc.

Cependant, il faut bien se garder de conclure que les trois tores OA, OB, O'B' passent par la même courbe gauche du quatrième ordre. En effet, les deux tores OB et O'B' à axes parallèles conduisent à une ellipse dont un des axes est parallèle à ces deux droites. Ainsi, le tore OA est coupé par les deux tores OB et O'B' suivant des courbes gauches *différentes*, qui forment, par leur ensemble, l'intersection totale du cylindre elliptique (6) et du tore OA. De la même manière, l'ellipse s'obtient en cherchant l'intersection des tores OB, O'A'.

5. — Par rapport aux axes $y''Mx''$ l'équation de l'ellipse est

$$(x^2 + y^2 - r^2) \sin^2 (\alpha + \beta)$$
$$= 4 \sin \alpha \sin \beta (x \cos \alpha - y \sin \alpha)(x \cos \beta + y \sin \beta);$$

ou, en représentant $\pi - \beta$ par α',

$$(x^2 + y^2 + r^2) \sin^2(\alpha - \alpha')$$
$$+ 4 \sin \alpha \sin \alpha' (x \cos \alpha - y \sin \alpha)(x \cos \alpha' - y \sin \alpha') = 0.$$

A chaque couple de valeurs α, α' correspond une ellipse déterminée. Il y a donc une infinité du second ordre de ces ellipses; en d'autres termes, on peut faire passer un nombre déterminé de ces ellipses par deux points quelconques donnés. Cependant le système de ces ellipses concentriques n'est pas un réseau linéaire. Car, en le projetant sur le plan du cercle circonscrit au triangle O'MO dont le centre a pour coordonnées :

$$x = a(1 - \cos \alpha \cos \alpha'), \quad y = - a(\cos \alpha + \cos \alpha'),$$

formules dans lesquelles a représente la hauteur issue de M, on trouve qu'aux ellipses qui passent par le point (ξ, η) correspondent les points de la parabole

$$(\xi^2 + \eta^2 + r^2)y^2 + 4a(\eta^2 - r^2)x - 4a\xi\eta y + 4a^2r^2 = 0$$

et non pas les points d'une droite, etc.

6. — Une question plus générale se rapporte au système des quadriques pour chacune desquelles l'intersection avec un tore donné se compose de deux courbes gauches du quatrième ordre. Les cylindres elliptiques (6) font partie de ce système. L'examen complet de ce système de quadriques n'entre pas dans le cadre de ce petit travail. Ainsi, nous nous contentons de démontrer que le système contient une infinité du cinquième ordre de surfaces; c'est-à-dire que par cinq points quelconques on peut faire passer un nombre déterminé de surfaces du système, et d'indiquer ce nombre dans un cas particulier.

7. — Chaque courbe d'intersection de deux quadriques, située sur un tore, est une *cyclique sphérique* (*).

En effet, la quadrique contenant la courbe et un cinquième point du cercle imaginaire à l'infini commun à toutes les sphères doit contenir ce cercle. Et cette quadrique est une sphère (**).

Chaque plan coupe une cyclique sphérique en quatre points

(*) On peut consulter le livre magistral de M. G. Darboux intitulé : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, etc.*, p. 27.

Le théorème peut être généralisé en remplaçant « tore » par « cyclide ».

La cyclique particulière, qui forme la partie cherchée de l'intersection dans le problème des deux tores, est une « sphéro-cylindrique ».

(**) La soustraction des équations (2) dont on a multiplié la première par $\sin^2 \beta$ et la seconde par $\sin^2 \alpha$ fait trouver les sphères

$$u^2 - 2dy = 0, \qquad u^2 - \frac{4 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} dx - 2dy = 0.$$

La première est la sphère de centre M et de rayon r, qui touche le tore suivant Z; c'est donc la seconde qui passe par la cyclique. Son centre a pour coordonnées $\frac{2d \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$, d, o; ce point est l'intersection de la parallèle à Ox par M avec la droite séparée harmoniquement de Oy par OA et OB.

d'un même cercle, car les quatre points d'intersection se trouvent sur la circonférence qui forme l'intersection du plan et de la sphère, qui contient la cyclique.

Par quatre points quelconques d'un tore donné, on ne peut faire passer qu'une cyclique unique; car ces quatre points déterminent la sphère contenant la cyclique. Il n'y a d'exception que si les quatre points considérés sur le tore sont situés dans un même plan : dans ce cas il y a indétermination ou impossibilité suivant que les quatre points sont ou ne sont pas sur un même cercle (*).

Deux cycliques situées sur le même tore se rencontrent en quatre points d'un même cercle. Si elles se trouvent sur la même quadrique, elles ont huit points communs, quatre points d'un même cercle à distance finie et quatre points à l'infini; ces huit points forment un octuple de points d'intersection de trois quadriques.

8. — Par cinq points quelconques on peut faire passer un nombre déterminé de quadriques, chacune desquelles rencontre le tore donné suivant deux cycliques.

(*) Semblablement, des quatre points de la cyclique situés à l'infini on n'en saurait choisir que trois à volonté. Car les trois couples de plans tangents en ces points aux deux cônes, qui touchent les deux nappes du tore le long de son cercle double, déterminent huit points, dont un doit être le centre de la sphère contenant la cyclique. Et si l'on veut que la sphère soit réelle, on ne saurait prendre au hasard que deux points du cercle imaginaire à l'infini et y ajouter les deux points conjugués, etc.

Pour le tore dont l'équation est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + d^2 - r^2)^2 = 4(x^2 + y^2)d^2,$$

les sommets des deux cônes dont nous venons de parler sont les points $o, o, \pm di$. Ces deux cônes forment la développable focale du tore; leur cercle d'intersection correspond aux équations

$$x^2 + y^2 = d^2, \qquad z = o,$$

est la focale du tore. L'équation des deux cônes est

$$x^2 + y^2 + (z \mp di)^2 = o.$$

Donc les points à l'infini des cycliques du tore donné, situés sur des sphères à centre commun a, b, c sont les quatre points d'intersection du cercle à l'infini et du couple de plans polaires

$$ax + by + (c \mp di)(z \mp di) = o,$$

qui se coupent suivant la droite réelle

$$ax + by + cz = d^2, \qquad z + c = o,$$

Il va sans dire qu'on peut remplacer ces deux plans par des plans parallèles passant par l'origine.

Le système des quadriques, qui est d'une infinité du neuvième ordre, contient une infinité du cinquième ordre de surfaces, qui satisfont à la condition quadruple de toucher un tore donné en quatre points non indiqués.

9. — *Le nombre de ces quadriques qui passent par cinq points donnés du tore est égal à quinze.*

En effet, chacune des quinze manières dont on peut partager les cinq points donnés entre les deux cycliques fait connaître une quadrique, qui satisfait aux conditions posées (*).

SUR TROIS THÉORÈMES DE BUDAN

Par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

(*Suite*, voir p. 58.)

8. Corollaire I. — *Si, en se servant des théorèmes* I *et* II, *on ne réussit pas, de prime abord, à reconnaître l'existence ou*

(*) Il est évident que chacun des cinq arrangements (4, 1) fait trouver une cyclique. Car les quatre points déterminent la cyclique qui les contient et, par cette cyclique et le cinquième point, il passe toujours une quadrique et une seule.

Les arrangements (3, 2) ne sont pas aussi faciles à examiner que les précédents. Soient A, B, C le terne de points du tore situé sur l'une et D, E le couple de points du tore situé sur l'autre des deux cycliques. Soit λ un plan quelconque passant par DE, C^4 l'intersection de λ et du tore, et R, S la couple de points commun à λ et au cercle ABC. Le faisceau des sphères ABC est coupé par λ suivant le faisceau des cercles par R, S. Ainsi la détermination des huit points d'intersection de λ et des deux cycliques conduit au problème suivant :

« Dans un plan, on donne une cyclique plane C^4, deux points D, E sur cette courbe et deux points R, S en dehors. Par D, E on mène un cercle μ qui coupe C^4 de nouveau en F, G, et, par R, S, on mène un cercle ν qui coupe C^4 en K, L, M, N. De combien de manières peut-on déterminer μ et ν de telle sorte que les huit points D, E, F, G, K, L, M, N se trouvent sur une même conique? »

La supposition que C^4 se compose de deux cercles et que chacun de ces deux cercles contient un des deux points donnés D et E, prouve qu'il y a une solution unique au moyen du joli théorème suivant, facile à vérifier par l'Analyse :

« Deux couples de circonférences se rencontrent en huit points situés sur une conique, quand les couples des centres sont les couples de sommets opposés d'un parallélogramme. »

l'absence de racines réelles entre $x = \alpha$ *et* $x = \alpha + h$, *on y arrivera du moins au bout d'un nombre fini* (*) *d'opérations, en subdivisant l'intervalle. — On suppose toutefois que* $f(x) = 0$ *est débarrassée de ses racines égales.*

En effet, si la fonction $f(x)$ s'annule dans l'intervalle considéré, nos intercalations la feront tôt ou tard changer de signe. Cela arriverait même si les racines étaient multiples et d'ordre impair. Si, au contraire, il n'y a pas de racines réelles, les intercalations, en se resserrant, rendent aussi petits qu'on veut les cercles limitatifs. Donc les points-racines de $f(x) = 0$, qui ont des positions fixes, ne pourront plus, à partir d'un certain moment, être contenus dans ces cercles, et alors, d'après le théorème II, la suite collatérale manifester l'absence de racines réelles (**).

9. Corollaire II. — *Généralement la question sera décidée au bout d'un très petit nombre d'opérations.* (Voir la démonstration au n° 15.)

La règle de Newton (voir une note précédente) dispensera même souvent d'une seconde opération, car le but du théorème II est, au fond, de faire reconnaître d'une manière rapide si l'équation en $y - \frac{1}{h}$ n'a pas de racines positives. Mais la règle de Newton y arrive également.

La méthode est en défaut, mais seulement dans certains intervalles, quand il ne s'y rencontre que des racines égales; et elle est désavantageuse, si les racines, réelles ou imaginaires, sont très près d'être égales (le point représentatif de l'imaginaire est alors très voisin de l'axe des x). Dans ces deux cas, les opérations sur la collatérale se prolongent sans

(*) On ne peut en dire autant de la méthode des différences. Elle ne donne aucun moyen d'arrêter les intercalations, si on a soupçonné à tort un couple de racines réelles dans l'intervalle. Et, inversement, il arrive souvent qu'elle ne donne aucun moyen de soupçonner ce couple, s'il existe. Lagrange, il est vrai, a remédié théoriquement à ces inconvénients par la méthode de l'*équation aux différences*, mais les calculs, on le sait, sont rebutants et obligeraient souvent à des milliers de substitutions.

(**) A plus forte raison, cela aura lieu dès que les points-racines arriveront à ne plus être situés dans le carré circonscrit au cercle limitatif, c'est-à-dire quand on aura $h \leqslant 2\mu$.

succès. Nous croyons que, pour ces intervalles critiques, il n'y a d'autre ressource que de recourir au théorème de Sturm. En effet, si l'on voulait débarrasser l'équation de ses racines égales, il faudrait commencer par chercher le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$, ce qui revient à faire tous les calculs de Sturm.

Il n'en reste pas moins vrai qu'il est toujours avantageux d'appliquer la méthode de Budan. Car, pour la majorité des équations, elle conduira rapidement au résultat. S'il y a, au contraire, des racines égales ou presque égales, elle révélera encore rapidement les autres racines, et resserrera les premières dans des intervalles aussi petits qu'on voudra.

10. — L'exemple suivant est emprunté à Lagrange (voir sa note VIII). Ne connaissant pas le théorème II, il propose cette équation pour montrer que le théorème I ne saurait suffire; ce qui est indubitable.

(10) $$x^3 - 2x^2 + 6x - 11 = 0.$$

La suite (A) est alors, pour $x = 1$,

$$-6 + 5 + 1 + 1.$$

Donc, d'après le théorème I, il se perd deux variations entre 0 et 1; ainsi, dans cet intervalle, il y a un couple de racinesqui est douteux. Mais la suite collatérale lève ce doute. Car elle donne alors, et sans calcul (**20**) (*),

$$-6 - - -$$

Les deux racines sont donc imaginaires, puisqu'il n'y a pas de variations.

11. — Voici deux autres équations (*), proposées par Serret, pour expliquer la méthode de Fourier dont nous parlerons plus loin (**12**). La méthode de Budan va être plus rapide.

(11) $$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

(12) $$x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012 = 0.$$

(*) Comme vérification des calculs, on voit, *a priori*, que pour $y = \frac{1}{h}$, la suite collatérale commence par $\frac{f(\alpha + h)}{h^m}$ et finit par $f(\alpha)$. Ici elle a donc à ses extrémités -6 et -11.

(**) La première est due à Midy (Voyez Catalan, *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 253).

La suite (A), relative à la première équation, perd deux variations entre — 1 et 0; quatre entre 0 et 1; ce qui donne six racines douteuses. Or, pour ces deux intervalles, on trouve sans calcul (**20**) que la suite collatérale n'a pas de variations. Cela montre ainsi, très simplement, que la proposée a six racines imaginaires.

Pour la seconde équation, un groupement irrégulier montre que 10 est une limite supérieure des racines positives. D'autre part, la suite (A) perd trois variations entre 0 et 10, ce qui donne une racine certaine et deux douteuses. Mais la suite collatérale présente un signe — suivi de signes +. Donc, il n'y a qu'une racine réelle dans l'intervalle (**5**).

12. — Nous venons de dire que Fourier s'est posé le même problème que Budan. Il l'a résolu d'une autre manière qui, d'habitude, est moins avantageuse. En raison des deux idées sur lesquelles elle repose, on peut la caractériser par les noms de méthode *des sous-tangentes* et de méthode *des reculs successifs*.

On sait que la formule de correction de Newton revient à ajouter, à la valeur approchée α, une sous-tangente correspondante $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$. De même, si un arc, compris entre les abscisses α, $\alpha + h$, ne coupe pas l'axe des x, on pourra le reconnaître par les sous-tangentes des points extrêmes. Moyennant certaines restrictions sur la forme de l'arc, il suffira que les tangentes se croisent entre l'arc et l'axe des x, c'est-à-dire que la *somme arithmétique des sous-tangentes soit plus grande que* h.

Si la méthode se réduisait à ce *criterium*, elle serait très simple. Mais nous avons dit qu'il faut la combiner, le plus souvent avec l'opération des reculs successifs. De là certaines difficultés (*). La méthode de Budan, formulée par un théorème unique, est plus facile à retenir; elle est en général d'un calcul plus rapide. *(A suivre.)*

(*) Voir Serret, *Algèbre supérieure.* Nous avons cherché à présenter cette théorie sous une forme moins abstraite. Voici la règle : 1° Parmi les variations qui se perdent, on considère les deux qui se trouvent le plus à gauche. Si elles ne sont pas contiguës, on les amène à l'être par un

BIBLIOGRAPHIE

Revue générale des sciences pures et appliquées, paraissant le 15 et le 30 de chaque mois (Paris, 18 francs; Départements, 20 francs; Union postale, 22 francs. — O. Doin, éditeur, 8, place de l'Odéon.)

Cette publication, dirigée par M. Louis Olivier, Docteur ès sciences, s'adresse à tous les amis des sciences et elle nous paraît répondre à un besoin réel. Chaque numéro renferme : 1° des articles de fond rédigés par les maîtres les plus éminents; 2° un bulletin bibliographique mettant le lecteur au courant des productions scientifiques les plus récentes, publiées en France ou à l'étranger; 3° un compte-rendu très exact des travaux présentés, dans la quinzaine correspondante, aux diverses Académies et dans les sociétés savantes, telles que :

Académie des sciences de Paris. — Académie de médecine. — Société de biologie. — Société royale de Londres. — Académie des sciences de Vienne. — Académie royale de Belgique. — Académie des sciences de Berlin. — Société de physique de Berlin. — Académie royale des Lincei. — Académie des sciences de Turin. — Académie de médecine vétérinaire de Turin.

4° Des NOUVELLES dans lesquelles sont exposées les découvertes récentes. Les premiers numéros, sous cette rubrique, ont donné des articles fort intéressants sur : L'ÉCLIPSE TOTALE DU 22 DÉCEMBRE 1889; LA DISCUSSION RÉCENTE DES EXPÉRIENCES DE M. HERTZ; LA SYNTHÈSE DES FLUORURES DE CARBONE; LA LÈPRE DANS LES COLONIES ANGLAISES; LES PERTURBATIONS DE MERCURE ET LES LOIS ÉLECTRODYNAMIQUES DE GAUSS; UNE EXPÉRIENCE DE M. LODGE SUR LA RÉSONNANCE ÉLECTRIQUE; UNE NOUVELLE PLANTE REVIVISCENTE; DÉCOUVERTE D'UNE PLANÈTE ENTRE MARS ET JUPITER, ETC.

---

mouvement de recul, en subdivisant l'intervalle. 2° On cherche si le *criterium* des sous-tangentes tranche la question. S'il n'y réussit pas, on fait de nouvelles intercalations, après s'être assuré que l'insuccès ne tient pas à la présence de racines égales, dans une des équations dérivées. Quatre cas se présentent alors :

a) ou bien on retrouve un cas du même genre; on subdivisera de nouveau;

b) ou bien le *criterium* s'applique;

c) ou encore $f(x)$ a changé de signe;

d) ou enfin, dans leur mouvement de recul, les deux variations contiguës se sont séparées de nouveau. Alors on rétablira la contiguité par des subdivisions nouvelles. On opérera de même pour les autres couples de variations qui se perdent dans l'intervalle. — Il faut avoir une grande habitude de cette méthode pour ne pas s'égarer dans les six cas que nous venons d'indiquer. De plus, les intercalations sont parfois fort nombreuses, ce qui entraîne à de longs calculs. La méthode n'est courte que dans le cas où les deux variations qui se perdent sont contiguës à $f(x)$. Toutefois, elle a l'avantage de s'appliquer aux équations transcendantes.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

(2e Session 1889.)

On donne une parabole, un point A sur son axe et une droite fixe AD passant par ce point; on considère toutes les coniques bi-tangentes à cette parabole aux points où elle est coupée par la droite AD.

1° Lieu géométrique des centres de ces coniques. — Prévoir le résultat géométriquement. — Distinguer les points du lieu qui sont centres d'ellipses ou d'hyperboles. — Construire en particulier le centre de l'hyperbole équilatère qui satisfait aux conditions demandées, puis les asymptotes, ses axes et ses sommets.

2° On fait tourner la droite AD autour du point A, quel est le lieu des centres de toutes les hyperboles équilatères précédentes? — Cas où le point A coïncide avec le foyer de la parabole donnée.

3° On mène par le sommet O de la parabole des parallèles aux asymptotes de chaque hyperbole équilatère bi-tangente, elles coupent cette hyperbole en deux points M et N; trouver l'équation de la sécante MN et le lieu des points de rencontre de cette sécante avec la droite AD quand celle-ci tourne autour de A.

Étudier les transformations subies par la courbe, quand la distance OA croît de zéro à l'infini.

EXERCICE ECRIT

30. — Soit F le foyer d'une parabole P. Par un point M, on trace les deux tangentes à cette courbe, MA, MB. Soit R le point où le diamètre correspondant à M coupe P.

On propose de trouver le lieu de M, sachant que $\frac{MA.MB}{MR}$ est constant.

Note sur l'exercice 29.

1° Soit M (x_0, y_0) le point d'où partent trois normales formant avec le diamètre un faisceau harmonique. Les normales considérées rencontrent l'axe en des points A', B', C' et l'on a, d'après l'hypothèse faite, A'B' = B'C'.

Soit O le sommet de la parabole; on trouve facilement que les longueurs OA', OB', OC' sont les racines de l'équation

$$U^3 - U^2(2x_0 + p) + Ux_0(x_0 + 2p) - p\left(x_0^2 + \frac{y_0^2}{2}\right) = 0.$$

En désignant par U_1, U_2, U_3 ces racines, on a

$$2U_2 = U_1 + U_3$$

et, par suite, $$U_2 = \frac{2x_0 + p}{3}.$$

Finalement, le lieu est la parabole cubique représentée par l'équation

(A) $$27py^2 = 4(x - p)^3.$$

2° En désignant par X, Y les coordonnées du point G centre de gravité du triangle A″B″C″, dont les sommets sont les points où les normales, issues de M, rencontrent obliquement la parabole, on trouve que les ordonnées Y_1, Y_2, Y_3 des points A″, B″, C″ sont les racines de

$$Y^3y_0 + 2pY^2(p - x_0) - 2py_0(2p + x_0)Y + 2p^2(y_0^2 + 2x_0^2) = 0.$$

Soient x, y les coordonnées de G. On a donc

(1) $$3y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{2p(x_0 - p)}{y_0}.$$

D'ailleurs

$$3x = X_1 + X_2 + X_3 = \frac{Y_1^2}{2p} + \frac{Y_2^2}{2p} + \frac{Y_3^2}{2p} = \frac{(Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 - 2(Y_1Y_2 + \ldots)}{2p}$$

Finalement

(2) $$3x = \frac{9y^2 + 4p(x_0 + 2p)}{2p}.$$

La relation (A) donne, d'ailleurs,

(3) $$27py_0^2 = 4(x_0 - p)^3.$$

En éliminant x_0, y_0, entre (1), (2), (3), on trouve

$$2pxy^2 = 3y^4 + 4p^2y^2 + 4p^4.$$

La courbe correspondante se construit facilement.

Nota. — MM. Baudran, élève au lycée de Rouen, et G. Bernheim, élève au lycée Condorcet, ont envoyé une bonne solution de cet exercice.

QUESTIONS RÉSOLUES

Trouver le lieu que décrit l'orthocentre H *du triangle formé par le centre* O *d'une ellipse et par deux points conjugués* A, B *pris sur la courbe.*

Première solution. — Ce lieu revient à celui-ci ; *trouver le lieu décrit par le pôle normal d'une corde* Δ *qui passe constamment par deux points conjugués.*

Soient α et β les coordonnées de H, α' et β' celles du point H′, pôle tangentiel de AB. On sait que (G. L., *Géom. an.* p. 398)

(1) $$\beta = c^2\frac{\beta'(\alpha'^2 - a^2)}{a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2}, \quad -\alpha = c^2\frac{\alpha'(\beta'^2 + b^2)}{a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2}.$$

D'ailleurs le point H′ décrit l'ellipse qui correspond à l'équation

$$a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2 = 2a^2b^2.$$

Cette dernière relation pouvant s'écrire

(2) $$a^2(\beta'^2 - b^2) = b^2(a^2 - \alpha'^2),$$

on a, par combinaison avec les égalités (1) et (2),

(3) $$\frac{b\alpha'}{a\alpha} = \frac{a\beta'}{b\beta} = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}.$$

Les équations (1) et (3) donnent finalement, pour l'équation du lieu,

(A) $$c^4(a^2x^2 - b^2y^2)^2 = 2(a^2x^2 + b^2y^2)^3.$$

Seconde solution. — On peut aboutir à ce résultat, par une voie presque aussi simple, en utilisant les formules de Chasles.

Désignons par x', y' les coordonnées de A ; par x'', y'' celles de B.

La normale en A correspond à l'égalité

(1) $$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2.$$

De même, l'équation

(2) $$\frac{a^2x}{x''} - \frac{b^2y}{y''} = c^2$$

représente la normale en B.

D'ailleurs, les formules de Chasles donnent

$$\frac{x'}{a} = \frac{y''}{b}, \qquad \frac{y'}{b} = -\frac{x''}{a}.$$

L'équation (2) peut donc être écrite ainsi

(3) $$\frac{x}{y'} + \frac{y}{x'} = -\frac{c^2}{ab}.$$

En résolvant les équations (1), (3) par rapport à $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{y'}$, on a

(B) $$c^2\frac{x'}{a} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{ax - by}, \qquad -c^2\frac{y'}{b} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{ax + by};$$

et comme $$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

les égalités (B), combinées avec cette relation conduisent à l'équation (A), déjà trouvée.

La courbe qui correspond à (A) est unicursale, comme le prouvent les équations (1), (3), qu'on pourrait résoudre

rationnellement par rapport à x et à y. Elle a la forme d'une rosace constituée par quatre foliums, se réunissant au centre de l'ellipse proposée. La détermination des tangentes parallèles aux axes de l'ellipse est possible et offre de l'intérêt.

NOTE SUR LA QUESTION 278

Soit
$$f(x) = 0,$$
une équation ayant ses racines réelles et inégales.

Démontrer que
$$f + A_1 f' + A_2 f'' + \dots + A_p f^{(p)} = 0,$$
a toutes ses racines réelles et inégales, si
$$z^p - A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-1} \dots + (-1)^p A_p = 0,$$
a ses racines réelles.

M. A. Poulain nous a fait observer que ce théorème, proposé par nous (*Journal*, p. 48) et dont nous venons de reproduire l'énoncé, n'est pas nouveau. Il a été donné autrefois (*Nouvelles Annales*, 1866, p. 479) par M. Hermite; et, récemment (*), M. Fouret, l'a rencontré de son côté. On en trouvera une démonstration, due à M. Poulain, dans les *Nouvelles Annales*, 1867, p. 21.

Voici comment nous étions arrivé à cette propriété.

1. Lemme. — *Soit* $f(x) = 0,$
une équation du degré m, *dont toutes les racines* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ *sont réelles et inégales; l'équation*

(A) $$f(x) + \lambda f'(x) = 0,$$
a, elle aussi, ses racines réelles et inégales, quel que soit λ.

En effet, les racines α, substituées dans
$$f(x) + \lambda f'(x),$$
donnent la suite
$$\lambda f'(\alpha_1), \quad \lambda f'(\alpha_2) \dots \quad \lambda f'(\alpha_m)$$
qui ne présente que des variations. L'équation (A) a donc, manifestement, $m - 1$ racines réelles et inégales. Comme elle est du degré m, le Lemme est ainsi démontré.

(*) *Comptes rendus*, 1889.

2. — Si nous appliquons ce Lemme à l'équation (A), nous voyons que l'équation

$$f(x) + \lambda f'(x) + \mu\{ f(x) + \lambda f'(x) \}' = 0,$$

ou
$$f(x) + (\lambda + \mu)f'(x) + \lambda\mu f''(x) = 0,$$

a, comme la proposée, toutes ses racines réelles et inégales.

En posant $\lambda + \mu = A, \quad \lambda\mu = B$

on peut donc dire que

$$f(x) + Af'(x) + Bf''(x) = 0,$$

a ses racines réelles et inégales, si l'on peut déterminer pour λ, μ des valeurs réelles ; en d'autres termes si l'équation

$$z^2 - Az + B = 0,$$

a ses racines réelles. Etc.

Plus généralement, comme l'a observé M. Poulain *(loc. cit.)*; si $f(x) = 0$, a θ racines réelles et inégales, l'équation

$$f + A_1 f' + A_2 f'' + \ldots A_p f^{(p)} = 0,$$

admet au moins θ racines réelles, si

$$z^p - A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-2} \ldots + (-1)^p A_p = 0,$$

a ses racines réelles. G. L.

Nota. — MM. Leinekugel, élève au lycée Charlemagne, et Sarfati du lycée d'Alger nous ont envoyé une solution de cette question, analogue à celle qu'on vient de lire.

QUESTION 154 (*)

Solution par M. J. Berthon, élève au lycée de Lyon.

Si l'on pose $A_0 = \sin x, \quad A_1 = \sin x - x \cos x$; *puis, si l'on calcule* $A_2\ A_3 \ldots$ *par la formule de récurrence :*

$$A_{n+1} = (2n + 1)A_n - x^2 A_{n-1}$$

A_n *est de la forme* $U_n \sin x + V_n \cos x$. *Démontrer les propriétés suivantes :*

1° *On a :*
$$\frac{dA_n}{dx} = xA_{n-1}.$$

$$x\frac{d^2A_n}{dx^2} - 2n\frac{dA_n}{dx} + xA_n = 0.$$

(*) Marquée, par erreur, 141.

2° *La fonction* A_n *et ses* $2n$ *premières dérivées s'annulent pour* $x = 0$.

Quelle valeur prend alors la dérivée d'ordre $2n + 1$?

3° *Écrivant* $U_n + iV_n = P_n$, *puis faisant* $x = iy, P_n$ *est un polynôme en* y *à coefficients réels, et de degré* n:

$$P_n = a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_py^{n-p} + \ldots + a_n;$$

on a:
$$y\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2(y + n)\frac{dP_n}{dx} + 2nP_n \equiv 0.$$

Conclure, de là, que

$$a_p = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1.2.3\ldots(n+p)}{1.2\ldots(n-p).1.2\ldots p}.$$

1° Supposons que l'on ait $\frac{dA_n}{dx} = xA_{n-1}$. Je dis que :

$$\frac{dA_{n+1}}{dx} = xA_n.$$

Si nous différentions la formule qui donne A_{n+1} en fonction de A_n et de A_{n-1}, nous obtenons :

$$\frac{dA_{n+1}}{dx} = (2n + 1)\frac{dA_n}{dx} - 2xA_{n-1} - x^2\frac{dA_{n-1}}{dx}.$$

Remplaçant $\frac{dA_n}{dx}$ par xA_{n-1}, et $\frac{dA_{n-}}{dx}$ par xA_{n-2}, on a :

$$\frac{dA_{n+1}}{dx} = (2n + 1)xA_{n-1} - 2xA_{n-1} - x^3A_{n-2},$$

$$\frac{dA_{n+1}}{dx} = x[(2n - 1)A_{n-1} - x^2A_{n-2}] = xA_n.$$

Or la formule est vraie pour $n = 1$, $n = 2$; elle est donc générale.

Pour démontrer la seconde formule, observons que :

$$\frac{dA_n}{dx} = xA_{n-1}, \qquad \frac{dA_{n-1}}{dx} = xA_{n-2},$$

$$A_n = (2n - 1)A_{n-1} - x^2A_{n-2}.$$

Cette dernière s'écrit, en tenant compte des deux premières :

$$A_n = (2n - 1)\frac{dA_n}{dx}\cdot\frac{1}{x} - x\frac{dA_{n-1}}{dx}.$$

Si nous différentions la première de ces égalités, il vient

$$\frac{d^2A_n}{dx^2} = x\frac{dA_{n-1}}{dx} + A_{n-1},$$

d'où
$$x\frac{dA_{n-1}}{dx} = \frac{d^2A_n}{dx^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{dA_n}{dx}.$$

D'après cela, la quatrième de ces égalités devient :

$$xA_n - 2n\frac{dA_n}{dx} + x\frac{d^2A_n}{dx^2} = 0.$$

2° Partons de la formule :

$$\frac{dA_n}{dx} = xA_{n-1}.$$

La dérivée $(2n + 1)^{ème}$ de ce produit sera :

$$\frac{d^{2n+1}A_n}{dx^{2n+1}} = x\frac{d^{2n}A_{n-1}}{dx^{2n}} + 2n\frac{d^{2n-1}A_{n-1}}{dx^{2n-1}},$$

égalité qui, pour $x = 0$, se réduit à

$$\left(\frac{d^{2n+1}A^n}{dx^{2n+1}}\right)_0 = 2n\left(\frac{d^{2n-1}A_{n-1}}{dx^{2n-1}}\right)_0.$$

On trouvera, de même, que

$$\frac{d^{2n-1}A_{n-1}}{dx^{2n-1}} \text{ se réduit à } 2(n-1)\frac{d^{2n-3}A_{n-2}}{dx^{2n-3}};$$

et ainsi de suite, jusqu'à $\frac{dA_0}{dx}$ qui, pour $x = 0$, se réduit à l'unité.

On a donc finalement :

$$\left(\frac{d^{2n+1}A_n}{dx^{2n+1}}\right)_0 = 2n.2(n-1)\dots 2.1 = 2^n.n!$$

3° Le polynôme $P_n = U_n + iV_n$, dans lequel on a remplacé x par iy, est évidemment un polynôme de degré n, car une des quantités U_n ou V_n est de degré n; les coefficients sont réels : en effet V_n ne renferme que des puissances impaires de x, le facteur i^2 se trouvera donc dans tous les termes de iV_n. Posons donc :

$$P_n = a_0y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \dots + a_py^{n-p} + \dots + a_n$$

et démontrons l'identité

$$y\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2(y+n)\frac{dP_n}{dx} + 2(nP_n) \equiv 0.$$

Cette identité se vérifie aisément pour $n = 1, n = 2\dots$ Supposons-la vraie pour n, et démontrons-la pour $n + 1$. Il faut donc

établir que

$$y\frac{d^2P_{n+1}}{dx^2} - 2(y+n+1)\frac{dP_{n+1}}{dx} + 2(n+1)P_{n+1} \equiv 0.$$

Or, nous avons la relation $P_{n+1} = (2n+1)P_n + y^2P_{n-1}$ qui se déduit facilement de la formule de récurrence indiquée dans l'énoncé. Nous en tirons

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} = (2n+1)\frac{dP_n}{dx} + 2yP_{n-1} + y^2\frac{dP_{n-1}}{dx},$$

$$\frac{d^2P_{n+1}}{dx^2}(2n+1)\frac{d^2P_n}{dx^2} + 2P_{n-1} + 4y\frac{dP_{n-1}}{dx} + y^2\frac{d^2P_{n-1}}{dx^2}.$$

Si nous portons ces valeurs dans l'égalité à vérifier, nous trouvons, si nous la supposons vraie pour n et $n-1$, une identité. La formule est donc générale. Cette relation différentielle va nous servir pour calculer les coefficients de P_n.

Appliquant cette relation, nous avons:

$$(n-p+1)(n-p)a_{p-1} - 2n(n-p+1)a_{p-1} - 2(n-p)a_p + 2na_p = 0,$$

d'où

$$a_p = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2p}a_{p-1}.$$

On a donc, successivement,

$$a_{p-1} = \frac{(n+p-1)(n-p+2)}{2(p-1)}a_{p-2},$$

. . . .

$$a_1 = \frac{n(n+1)}{2}a_0.$$

Multipliant ces égalités et faisant $a_0 = 1$, on a:

$$a_p = \frac{1}{2^p}\cdot\frac{(n-p+1)\ldots n(n+1)\ldots(n+p)}{1.2\ldots p},$$

ou, en multipliant les deux termes de la fraction par $(n-p)!$

$$a_p = \frac{1}{2^p}\cdot\frac{(n+p)!}{(n-p)!\,p!} = \frac{1}{2^p}C_{n+p}^p.$$

Solutions analogues par: MM. J. Moulet, au collège de Manosque; E. Rogier; Paul Bourgarel, à Antibes.

QUESTION 164.

Solution par J. Chapron, à Bragelogne.

On écrit un mot en triangle, comme il suit, en prenant pour exemple le mot ABRACADABRA

ABRACADABRA
ABRACADABR
ABRACADAB
ABRACADA
ABRACAD
ABRACA
ABRAC
ABRA
ABR
AB
A

Dans ce triangle les mêmes lettres sont placées sur une même diagonale et l'on voit qu'en partant d'une ligne quelconque on peut lire le mot dans le sens de gauche à droite, puis de bas en haut.

Démontrer que si l'on part de la première lettre à gauche dans la ligne de rang q + 1 *du triangle formé par un mot de* (p + 1) *lettres, le nombre de manières de lire le mot est* C_p^q *et que le nombre total pour toutes les lignes est* 2^p. (Édouard Lucas.)

Considérons le mot

$$A_0\, A_1\, A_2 \ldots A_p$$

formé de $p + 1$ lettres. Après l'avoir écrit, comme il est expliqué dans l'énoncé, si l'on part de la lettre $A_{0,q}$ placée dans la ligne de rang $q + 1$, on pourra se diriger vers la lettre A_1 de deux façons seulement ; en prenant 1° la lettre $A_{1,q}$ écrite à sa droite ; 2° la lettre $A_{1,q-1}$ écrite au-dessus.

Soit X_p^q le nombre cherché, nombre correspondant à $A_{0,q}$; il est égal au nombre des lectures du mot $A_1 A_2 \ldots A_p$: 1° en partant de $A_{1,q}$; 2° en partant de $A_{1,q-1}$.

On a donc

$$X_p^q = X_{p-1}^q + X_{p-1}^{q-1}.$$

Supposons que la loi soit vérifiée par les mots de p lettres. Alors, on reconnaît que

$$X_{p-1}^{q} = C_{p-1}^{q}, \qquad X_{p-1}^{q-1} = C_{p-1}^{q-1}$$

on a donc $$X_{p}^{q} = C_{p-1}^{q} + C_{p-1}^{q-1}$$

ou $$X_{p}^{q} = C_{p}^{q}.$$

La loi est donc générale.

Quant au nombre total des lectures possibles, il est donné par la formule

$$1 + C_{p}^{1} + C_{p}^{2} \ldots + C_{p}^{p},$$

c'est-à-dire, comme on sait, 2^{p}.

Remarque. — On peut, d'ailleurs, établir directement la seconde partie de la proposition.

Soit Z_p le nombre total des lectures possibles ; en partant d'une des lettres A_0 on peut, comme nous l'avons observé, prendre la lettre A_1 située à gauche ; puis, la lettre située au-dessus. On a donc

$$Z_p = 2Z_{p-1}, \qquad \text{etc.}$$

QUESTION 182

Solution par M. Balitrand, élève en mathématiques spéciales au lycée de Nîmes (*).

Soit H *une hyperbole. Une droite mobile, tangente à* H, *rencontre les asymptotes en deux points* A, B, *que l'on projette en* A' *et* B' *sur l'axe non transverse de la courbe. Sur* A'B', *comme diamètre. décrivons un cercle* Δ, *et prenons, par rapport à* Δ, *le pôle* I *de* AB.

Trouver le lieu de I. *Ce lieu est l'axe transverse de* H. G. L.

Soient O le centre de l'hyperbole ; C l'intersection de AB avec l'axe non transverse. Les axes étant les bissectrices des asymptotes, ces droites rencontrent la tangente AB en quatre points C, A, B, D formant une division harmonique. La ponctuelle C, A', O, B' est donc, elle aussi, harmonique, et la polaire de C est l'axe transverse de l'hyperbole.

(*) Aujourd'hui, élève à l'Ecole Polytechnique.

Le pôle de AB, le point I, appartenant à la polaire de C, le lieu de I est donc l'axe transverse.

Ce raisonnement ne suppose nullement que AB soit tangente à l'hyperbole H ; la propriété en question est donc vérifiée pour une droite quelconque, prise dans le plan de cette courbe.

NOTA. — Solutions géométriques et analytiques par : MM. Valabrègue, élève au lycée de Montpellier ; Henri Cordier, élève au lycée de Rennes (classe de M. Antomari) ; J. Moulet, au collège de Manosque ; Étienne Pascot, au lycée de Montpellier ; Ignacio Beyens, capitaine du génie, professeur de mathématiques spéciales à Cadix ; Roux, élève au lycée de Grenoble ; Henri Seauve, élève au lycée de Grenoble ; Charles Merle, élève au lycée de Lyon ; G. Leinekugel, élève au lycée Charlemagne ; et X.

QUESTION 207

Solution par M. H. X.

On donne deux droites fixes Δ, Δ' *qui se coupent en* A, *et un point* B *sur* Δ. *D'un point* C, *mobile sur* Δ', *on abaisse sur* Δ *une perpendiculaire qui coupe cette droite en* C'. *A partir de* C', *on porte sur* Δ, *dans un sens déterminé, une longueur* C'D *constante. On demande :*

1° L'enveloppe de CD.

2° Le lieu du point G *d'intersection de* CC' *avec la perpendiculaire à* CD *issue du point* B. (Troille).

1. — Prenons Δ pour axe des x, une perpendiculaire passant par A pour axe des y ; soient α, β les coordonnées de C, liées par la condition

$$\beta = m\alpha;$$

m étant le coefficient angulaire de Δ'. Soit $C'D = d$. Pour avoir l'enveloppe de CD, il faut éliminer α entre l'équation de cette droite :

$$\frac{y-\beta}{\beta} = \frac{x-\alpha}{-d} \text{ ou } m\alpha x + dy - m\alpha(\alpha + d) = 0,$$

et la dérivée par rapport à α :

$$mx - md - 2m\alpha = 0.$$

On trouve ainsi

$$m(x - d)^2 + 4dy = 0,$$

équation d'une parabole.

2. — Soit AB $= a$. On obtient immédiatement le lieu en remplaçant, dans l'équation de la perpendiculaire considérée,

$$y = \frac{d}{m\alpha}(x - a),$$

α par x; ce qui donne

$$mxy - d(x - a) = 0.$$

Nota. — Solutions par MM Giovanni Russo, à Catanzaro; Delatour, élève en Mathématiques spéciales, au lycée Victor-Hugo, à Besançon; L. Delbourg, maître répétiteur au lycée d'Agen. — Solutions géométriques par MM. Henri Seauve, élève au lycée de Grenoble; Balitrand, élève au lycée de Nîmes; Roux, élève au lycée de Grenoble.

QUESTIONS PROPOSÉES

282 (*). — Étant donné un triangle ABC, prenons comme coordonnées angulaires d'un point M les angles $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, sous lesquels on voit, de M, les côtés du triangle. Nous les regarderons comme inférieurs à 180°, et de même signe que les coordonnées normales correspondantes (**).

(*) M. Poulain nous a adressé, avec cette question, deux autres qui s'y rattachent et que nous proposerons prochainement.

(**) La remarque suivante fait pressentir l'importance que pourront prendre ces coordonnées. Toutes celles qu'on emploie actuellement dans la Géométrie du triangle sont des éléments immédiats des triangles partiels MBC, ... Car x, y, z *(coordonnées trilinéaires)* sont leurs hauteurs; α, β, γ *(coordonnées barycentriques)* sont les aires; λ, μ, ν *(coordonnées tripolaires)* leurs côtés. Il reste encore à considérer les angles, partagés en deux groupes bien distincts. Or ces éléments d'un même triangle s'appellent forcément les uns les autres; et, par suite, l'étude des angles s'impose. On s'en est peu occupé jusqu'ici, quoiqu'on y fût invité par la définition des points de Brocard, des points inverses et des centres isogones. Ces coordonnées fondamentales étant étudiées, on pourra en faire dériver beaucoup d'autres espèces, probablement moins importantes. Par exemple, le rayon du cercle circonscrit à MBC se ramène aux angles, puisqu'il égale un côté divisé par le double d'un sinus; et le rayon du cercle inscrit égale $\frac{2\alpha}{\mu + \nu + a}$. — Nous proposerions volontiers d'appeler *angles latéraux* de M les deux groupes de trois angles formés avec les côtés, et *angles surlatéraux* de M ceux qui ont leur sommet en M.

1° Connaissant $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, on demande de trouver, en coordonnées barycentriques, l'équation d'un des cercles latéraux de M, c'est-à-dire d'un cercle circonscrit à un triangle tel que MBC.

2° Prouver que les coordonnées barycentriques α, β, γ de M sont données par les formules

(1)

$$\alpha(\cot g\,\mathfrak{X} - \cot g\,A) = \beta(\cot g\,\mathfrak{Y} - \cot g\,B) = \gamma(\cot g\,\mathfrak{Z} - \cot g\,C).$$

Indiquer quelques vérifications.

3° Si, dans ces expressions, on remplace α, β, γ par les doubles des coordonnées absolues α_1, β_1, γ_1, elles deviennent égales à la puissance de M par rapport au cercle circonscrit. On a donc

(2) $$2\alpha_1(\cot g\,\mathfrak{X} - \cot g\,A) = \overline{MO}^2 - R^2.$$

4° Des valeurs proportionnelles aux coordonnées tripolaires λ, μ, ν de M sont données par

(3) $$\frac{\lambda\alpha}{\sin\mathfrak{X}} = \frac{\mu\beta}{\sin\mathfrak{Y}} = \frac{\nu\gamma}{\sin\mathfrak{Z}}.$$

5° Pour le problème inverse de 2°, on a, en posant $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$,

(4) $$\cot g\,\mathfrak{X} = \cot g\,A - \frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{2S\sigma\alpha}.$$

6° Calculer les sinus, cosinus et cotangente de $\mathfrak{X}$, en fonction de μ, ν, α, σ. On peut en déduire de nouvelles valeurs en fonction de α, β, γ. *(A. Poulain.)*

283. — Résoudre, complètement, l'équation

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0.$$

(Catalan.)

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 7120-4-90.

SUR TROIS THÉORÈMES DE BUDAN

Par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

(*Suite et fin*, voir p. 79.)

III. — *Marche pour la séparation des racines.*

13. — Voici la marche que Budan a indiquée pour utiliser ses deux théorèmes. Tout revient à trouver les racines positives. On détermine d'abord uné limite supérieure. Supposons qu'on ait trouvé 45. On pourrait chercher immédiatement le nombre de variations perdues entre 0 et 45. Mais il est plus avantageux de ne prendre que des nombres différant d'une puissance de 10. De cette manière, on simplifie beaucoup les calculs (**18**), et chaque nouvelle subdivision donne un chiffre de plus aux racines qu'elle manifeste.

Substituons donc 0 et 100; ou encore les nombres plus rapprochés 0, 10, 20,..., 50.

14. — Pour chacun des intervalles ainsi examinés, trois cas peuvent se présenter.

1er cas. — *Entre* α *et* $\alpha + h$, *il s'est perdu une seule variation.* Il est certain qu'alors il y a une seule racine réelle. Il ne reste qu'à l'approcher davantage, par les méthodes connues.

2e cas. — *La perte est* $2k + 1$. — De nouvelles intercalations ramèneront forcément au cas précédent ou au suivant; à moins que toutes ces racines soient égales.

3e cas. — *Il s'est perdu un nombre pair de variations.* — Nous avons vu que la suite collatérale arrive toujours à décider ce qui se passe dans l'intervalle; sauf si toutes les racines sont égales.

15. — Ajoutons maintenant que *la suite collatérale réussit le plus souvent au bout d'un petit nombre d'opérations.* En effet, soit encore 45 une limite supérieure des racines positives, et

supposons que nous ayons substitué 0, 10, 20,... Par hypothèse, le théorème I a été essayé et a laissé dans le doute l'existence d'une racine, par exemple, entre 20 et 30. Pour que la suite collatérale laisse subsister ce doute, il faudra que, par une coïncidence singulière $f(x) = 0$ ait des points racines justement dans cet intervalle; que de plus ils soient à l'intérieur du *cercle limitatif* décrit sur le segment 30 — 20; sans compter d'autres conditions qui doivent être vérifiées.

Or ce cercle a une surface très petite par rapport à celui qui forme l'*aire possible* des points-racines. Il y a donc beaucoup de chances pour que la première opération réussisse. Si pourtant elle échoue, on divise l'intervalle h en 10 parties égales et le nouveau cercle qui doit échapper aux points-racines n'est plus en surface que la centième partie du précédent; et ainsi de suite. Les chances de succès augmentent très rapidement.

Dans la pratique, on est frappé de la rapidité des réponses. Pour la mettre en lumière, nous avons tenu à ne pas choisir nous-même les trois exemples ci-dessus (**10, 11, 12**).

IV. — *Troisième théorème de Budan (règle des quotients successifs).*

16. — Lorsqu'on applique les théorèmes I et II, un problème se pose nécessairement : *indiquer un moyen rapide de calculer les termes de la suite*

$$(A) \qquad f(x), \quad \frac{f'(x)}{1}, \quad \frac{f''(x)}{1.2}, \ldots$$

pour les valeurs successives de x.

Une première méthode se présente, celle des *substitutions directes*. On y évite les élévations de x à différentes puissances (pour x entier), si on emploie une règle de récurrence bien connue (*). Mais 1° il reste à faire une suite de multiplications par x (sauf pour x égal à 1 ou à une puissance de 10); 2° auparavant, il faut former l'expression des dérivées, ce qui exige des multiplications de coefficients. Budan a donné un procédé généralement beaucoup plus court, qu'il appelle son *algorithme*. Il se base sur le théorème suivant qui est l'exten-

(*) Voir tous les traités à propos de la division des polynômes ou de l'essai des racines entières.

sion d'un énoncé bien connu sur le reste de la division de $f(x)$ par $x - h$.

17. Théorème III. — *1° Si l'on appelle quotients successifs de* $f(x)$ *par* $x - h$, *le quotient ordinaire* Q_1, *puis le quotient de* Q_1 *par* $x - h$ *et ainsi de suite, les restes de ces divisions sont les quantités* $f(h), \frac{f'(h)}{1}, \frac{f''(h)}{1.2}, \ldots$; *2° plus généralement, si l'on opère, non plus sur* $f(x)$, *mais sur le développement de* $f(x + \alpha)$, *les restes successifs sont* $f(\alpha + h), \frac{f'(\alpha + h)}{1}, \ldots$

Ajoutons immédiatement que ces quotients s'obtiennent, non par une division proprement dite, mais par la règle de récurrence indiquée plus haut (*).

Démonstration. — 1° Pour $f(h)$, le théorème est connu. La suite de l'énoncé peut se déduire de ce premier théorème par des groupements successifs, faits dans la formule de Taylor. Celle-ci donne d'abord

$$f(x) = f(h) + (x - h)\left[\frac{f'(h)}{1} + (x - h)\frac{f''(h)}{1.2} + \ldots\right].$$

Le premier quotient Q_1 est nécessairement écrit dans la grande parenthèse ; seulement il se trouve ordonné suivant les puissances de $x - h$, ce qui ne change pas sa valeur. Comme on obtient le reste de la seconde division en faisant $x = h$ dans ce polynôme, on trouve $\frac{f'(h)}{1}$. En raisonnant de même sur Q_1, on trouve le troisième reste; et ainsi de suite.

2° On part de

(*) Aussi Budan présente rarement l'énoncé sous la forme précédente. Au lieu de parler de quotients, il définit d'abord, par la règle de récurrence, les mots *termes sommatoires* ou *syntagmes* (premiers, seconds, etc.). La méthode contraire nous a paru préférable : elle ne rebute pas le lecteur par la nouveauté du langage et rattache l'énoncé à un autre, très connu. — Ce procédé fut communiqué à l'Académie en 1803. Legendre et Lagrange qui l'examinèrent avec Biot et Lacroix le déclarèrent élégant et nouveau. Lagrange le recommande dans sa Note VIII. Le mérite est moins dans le théorème lui-même que dans la règle pratique qui en découle. C'est de cet algorithme que Budan déduisait la démonstration complète de son théorème I.

$$f(x+\alpha) = f(\overline{\alpha+h} + \overline{x-h}) = f(\alpha+h) + (x-h)\frac{f'(\alpha+h)}{1} + \dots$$

et l'on raisonne de la même manière.

18. Corollaire. — Ayant les termes de la suite (A), pour $x=\alpha$, on peut donc, au moyen du théorème III, avoir les valeurs de ces termes pour $x = \alpha + h$. Cela résout le problème proposé. Car, pour la valeur initiale $x = 0$, on connaît toujours la suite (A). On n'a donc qu'à avancer de proche en proche. Seulement la question est de savoir sur quelles abréviations on peut compter par ce procédé. Si h était quelconque, il y aurait déjà une abréviation appréciable; elle consiste à éviter la formation algébrique des différentes dérivées, et dès lors une suite de multiplications de coefficients. Mais nous avons vu que Budan suppose toujours que h égale une puissance de 10 (**13**). Dès lors, on n'a plus à faire que des additions algébriques, ce qui est beaucoup plus rapide. Ex. : Si dans l'équation (10) on voulait substituer $x = \frac{1}{10}$, on dirait : le premier terme du quotient est 1 ; le second, $1 \times \frac{1}{10} - 2$ ou $\frac{1-20}{10}$, etc. ; ce qui n'exige pas de multiplication proprement dite.

19. — Voici, pour cette même équation, (10) la disposition du calcul donnant le résultat de la substitution de $x = 1$. On marche de droite à gauche.

Coefficients en sens inverse	$-11+6-2+1$
1er reste $= -6$	. . . . $5-1$ 1
2e reste $= 5$	. . . . . . 0 1
3e reste $= 1$	 1
4e reste $= 1$	 1
Résultat	$-\ 6+5+1+1$

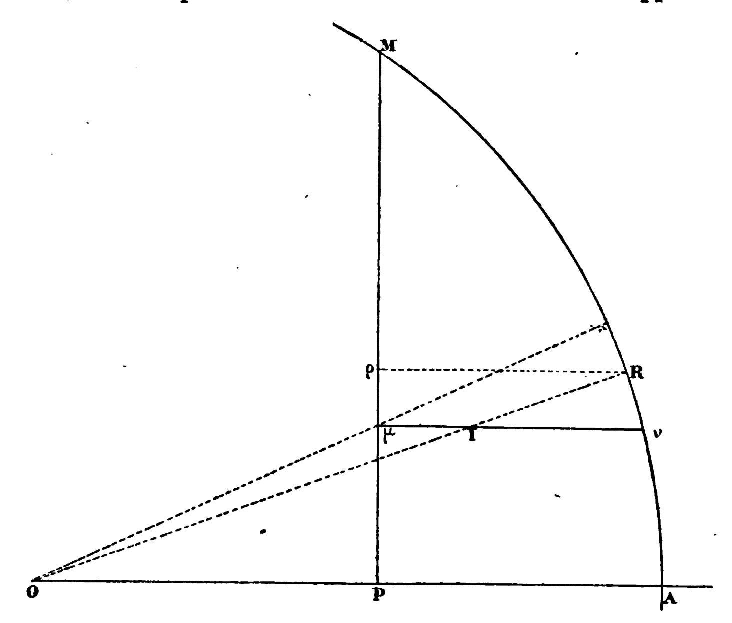
20. — Il y a, assez souvent, une sorte d'abréviation qui résulte de cet algorithme. Il arrive qu'un des quotients successifs et son reste ont tous leurs termes positifs. Dès lors les opérations suivantes ne peuvent onner que des quantités

positives, et il est inutile de les effectuer, puisqu'on ne cherche que des signes. D'autres fois ces signes s'aperçoivent sans calcul (voir les trois exemples ci-dessus).

DIVISION D'UN ARC DE CERCLE
DANS UN RAPPORT DONNÉ, AU MOYEN DE LA RÈGLE ET DU COMPAS

Par M. **Pellet**, professeur à la Faculté des sciences de Clermont.

Au moyen de la règle et du compas, on ne peut diviser un arc de cercle en trois parties égales, par un nombre fini d'opérations, mais on peut effectuer cette division avec une approxi-



mation indéfinie; et comme la convergence est très rapide, la construction est vraiment pratique.

La construction peut même s'étendre au cas où l'on veut

diviser l'arc dans un rapport quelconque m, plus petit que $\frac{1}{2}$; seulement, dans ce cas, l'approximation n'est pas indéfinie; toutefois elle est assez grande dans la pratique, lorsque l'arc est inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

1° Soient AM $= a$ un arc de cercle plus petit que $\frac{\pi}{2}$, PM son sinus; μ étant un point de PM, élevons, de ce point, une perpendiculaire sur PM jusqu'à sa rencontre avec l'arc AM en ν, et prolongeons la droite $O\mu$, joignant le centre O au point μ, jusqu'à sa rencontre avec l'arc AM en ν_1. R étant un point de l'arc $\nu\nu_1$, traçons OR et soit I l'intersection de cette droite avec $\mu\nu$; puis menons $R\rho$ perpendiculaire sur PM. Posons :

$$AR = \omega, \qquad P\mu = m \,.\, PM = m \sin a.$$

On a :

$$\rho R = \cos \omega - \cos a.$$

I est l'intersection de deux droites OR dont l'équation est $y = x \operatorname{tg} \omega$, et $\mu\nu$ dont l'équation est $y = m \sin a$, en prenant pour axe des x la droite OA et pour axe des y la perpendiculaire, à OA, menée par le point O. On en déduit

$$\mu I = m \sin a \operatorname{cotg} \omega - \cos a$$

et, en désignant par r le rapport $\frac{\mu I}{\rho R}$,

$$r = \frac{m \sin a \cos \omega - \cos a \sin \omega}{\sin \omega (\cos \omega - \cos a)}.$$

Ce rapport va en diminuant de 1 à 0 lorsque le point R va du point ν au point ν_1, c'est-à-dire quand ω varie: depuis l'arc dont le sinus est $m \sin a$, jusqu'à l'arc dont la tangente est $m \operatorname{tg} a = \frac{P\mu}{OP}$.

En effet, la dérivée de r, par rapport à ω, peut se mettre sous la forme :

$$\frac{-m \sin a \cos^2 \omega (\cos \omega - \cos a) - \cos a \sin^2 \omega (\sin \omega - m \sin a)}{\sin^2 \omega (\cos \omega - \cos a)^2}.$$

Les quantités $\cos \omega - \cos a$ et $\sin \omega - m \sin a$ sont positives lorsque ω varie dans les limites indiquées; donc, entre ces limites, la dérivée de r est négative; ce qui démontre la proposition. Il en résulte que si l'on se donne la valeur de ce rapport r, le point R est déterminé, et l'on peut en approcher indé-

finiment dans les deux sens, de la manière suivante. Soient R_1 un point de l'arc $\nu\nu_1$, $R_1\rho_1$ sa distance à PM; prenons, sur $\mu\nu$, $\mu I_1 = r.\rho_1 R_1$; la droite OI rencontre l'arc AM en un point R_2 compris entre R_1 et R. En effectuant la même construction en partant de R_2, on obtiendra un point R_3 compris entre R_2 et le point cherché R; et ainsi indéfiniment.

2. Le point R correspondant à $\omega = ma$ se trouve toujours sur l'arc $\nu\nu_1$. Pour $\omega = ma$, la valeur de r est

$$\frac{m \sin a . \cos ma - \cos a . \sin ma}{\sin ma (\cos ma - \cos a)}$$
$$= \frac{(1 + m) \sin (1 - m)a - (1 - m) \sin (1 + m)a}{\sin 2ma - \sin (1 + m)a + \sin (1 - m)a}.$$

Pour $m = \frac{1}{3}$, on constate que ce rapport est indépendant de a et égal à $\frac{2}{3}$. En prenant $m = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{2}{3}$, la construction indiquée plus haut donnera donc le tiers de AM. Si m est différent de $\frac{1}{3}$, la valeur du rapport précédent n'est pas indépendante de a, mais elle est toujours voisine de $\frac{2}{3}$, si m est $< \frac{1}{2}$. Soit alors R' le point correspondant à $r = \frac{2}{3}$, la différence entre $m\omega$ et l'arc AR' est plus petite, en valeur absolue et de même signe que :

$$\frac{1}{7} m(1 - 9m^2)\left(\frac{2a}{\pi}\right)^5,$$

quantité dont le module est plus petit que $\frac{1}{11}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^5$. (Voir *Bulletin de la Société Mathématique*, année 1888, p. 116).

Ainsi la distance du point R', pour $m < \frac{1}{2}$ au point R tel que AR $= m$.AM est inférieure à $\frac{1}{352}$ du rayon, si l'angle AOM est plus petit que 45°; et inférieure à $\frac{1}{2673}$ du rayon, si AOM $<$ 30°.

SUR UN GROUPE DE QUATRE CONIQUES REMARQUABLES
DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **Auguste Boutin.**

Soit O, I, I', I'', I''', les centres du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle de référence.

Les transformées par points inverses des quatre droites : OI, OI', OI'', OI''' sont quatre coniques remarquables, que nous désignerons par (B_I) $(B_{I'})$ $(B_{I''})$ $(B_{I'''})$.

Ces coniques sont circonscrites au triangle de référence; elles passent par l'orthocentre H, inverse de O, ce sont donc quatre hyperboles équilatères.

Leurs équations sont, en coordonnées trilinéaires, normales :

(B_I)

$$\frac{\cos B - \cos C}{x} + \frac{\cos C - \cos A}{y} + \frac{\cos A - \cos B}{z} = 0$$

$(B_{I'})$

$$\frac{\cos B - \cos C}{x} - \frac{\cos A + \cos C}{y} + \frac{\cos A + \cos B}{z} = 0$$

et deux équations analogues pour $(B_{I''})$ $(B_{I'''})$.

La conique (B_I) passe par les points : ν, Γ, I, J_2 (inverse du point J, rencontré par M. de Longchamps dans son étude : *Sur une conique remarquable du plan d'un triangle.* Association française. Congrès de Nancy, 1886). Les coordonnées normales de ce point vérifient les relations :

$$x : y : z = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} : \operatorname{cotg}\frac{B}{2} : \operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

J_2 est le point de Lemoine du triangle I'I''I'''.

La même conique passe encore par les points dont les coor données vérifient les égalités :

(Ψ)

$$x(\cos B + \cos C) = y(\cos C + \cos A) = z(\cos A + \cos B),$$

$$x \cos^2 A(\cos B + \cos C) = y \cos^2 B(\cos A + \cos C)$$
$$= z \cos^2 C(\cos A + \cos B),$$

$$x \sin^2 A(\cos B + \cos C) = y \sin^2 B(\cos A + \cos C) = z \sin^2 C(\cos A + \cos B).$$

(Ψ) est l'inverse du point d'intersection de OI et de $\Gamma\nu$.

La conique ($B_{I'}$) passe par I', ν'_a, Γ'_a (ces deux derniers points appartenant aux groupes dits de Nagel et de Gergonne).

Les coniques ($B_{I''}$) ($B_{I'''}$) ont des propriétés analogues.

Les tangentes à (B_I) en I, à ($B_{I'}$) en I', à ($B_{I''}$) en I'', à ($B_{I'''}$) en I''', sont, respectivement : OI, OI′, OI″, OI‴.

Ces quatre coniques peuvent être engendrées de la même manière :

A_1, B_1, C_1 *étant les points de contact du cercle inscrit avec les côtés de* ABC, *si l'on porte dans le même sens, sur* IA_1, IB_1, IC_1, *les longueurs :* $IA_2 = IB_2 = IC_2 = l$; *les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *sont concourantes. Le lieu de leur point de concours, quand* l *varie, est la conique* (B_I).

On a aisément pour un point du lieu :

$$x(r + l \cos A) = y(r + l \cos B) = z(r + l \cos C);$$

et l'élimination de l donne l'équation de (B_I).

Voici les valeurs de l qui correspondent aux points les plus remarquables de (B_I).

Pour A, B, C, $l = -\dfrac{r}{\cos A}, \ -\dfrac{r}{\cos B}, \ -\dfrac{r}{\cos C}.$

Pour I, $l = 0$.

Pour Γ, $l = r$.

Pour H, $l = \infty$.

Pour ν, $l = -r$.

Pour J_2, $\dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{r}.$

Pour Ψ, $\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R} = 0.$

Si, à I, on substitue I', le théorème subsiste, les droites analogues à AA_2, BB_2, CC_2, concourent au point déterminé par :

$$-x(r' + l \cos A) = y(r' - l \cos B) = z(r' - l \cos C).$$

L'élimination de l donne, pour l'équation du lieu, celle de la conique ($B_{I'}$). En partant de I'', I''', le même théorème donnerait les deux autres coniques.

On trouve, pour les coordonnées normales des centres : C_I, $C_{I'}$, $C_{I''}$, $C_{I'''}$ de ces coniques :

C_1 $$\frac{x}{\sin^2\frac{B-C}{2}} = \frac{y}{\sin^2\frac{C-A}{2}} = \frac{z}{\sin^2\frac{A-B}{2}},$$

$C_{1'}$ $$\frac{x}{-\sin^2\frac{B-C}{2}} = \frac{y}{\cos^2\frac{A-C}{2}} = \frac{z}{\cos^2\frac{A-B}{2}}, \text{ etc.}$$

Il résulte, d'un théorème général, que ces quatre centres sont situés sur la circonférence des neuf points de ABC. On constate en outre aisément que ces quatre centres sont situés respectivement sur les droites O_9I, O_9I', O_9I'', O_9I'''. Il résulte alors, du théorème de Feuerbach, que ces centres sont les points de contact du cercle d'Euler avec le cercle inscrit et avec les cercles ex-inscrits à ABC.

Les triangles $C_{1'}C_{1''}C_{1'''}$, $I'I''I'''$ sont homologiques, le centre d'homologie est le point O_9, centre du cercle des neuf points de ABC.

Les triangles $C_{1'}C_{1''}C_{1'''}$, ABC sont homologiques, le centre d'homologie est le point déterminé par les relations :

$$\frac{x}{\cos^2\frac{B-C}{2}} = \frac{y}{\cos^2\frac{A-C}{2}} = \frac{z}{\cos^2\frac{A-B}{2}}.$$

On peut remarquer les relations :

$$\frac{\overline{C_{1''}C_{1'''}}^2\cdot\left(2\cos\frac{A}{2}-1\right)^2}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\overline{C_{1'}C_{1'''}}^2\left(2\cos\frac{B}{2}-1\right)^2}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{\overline{C_{1'}C_{1''}}^2\left(2\cos\frac{C}{2}-1\right)^2}{\cos\frac{C}{2}},$$

$$\frac{\overline{C_1C_{1'}}^2\left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)^2}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\overline{C_1C_{1''}}^2\left(2\sin\frac{B}{2}-1\right)^2}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\overline{C_1C_{1'''}}^2\left(2\sin\frac{C}{2}-1\right)^2}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Les asymptotes des quatre coniques considérées sont, respectivement, les droites de Simson, des extrémités des diamètres OI, OI′, OI″, OI‴ du cercle circonscrit.

Les asymptotes des coniques $(B_{1'})$, $(B_{1''})$, $(B_{1'''})$ sont six droites qui concourent trois à trois; trois d'entre elles forment un triangle dont les trois autres droites sont les hauteurs. Ce triangle a même cercle des neuf points que ABC.

Si T_1, T'_1, T''_1, T'''_1 sont les triangles tels que $A_2B_2C_2$, obtenus pour une même valeur de l, en partant successivement des points: I, I′, I″, I‴; θ désignant l'angle de Brocard; on a:

$$\cot\theta_1 = \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$\cot\theta'_1 = \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

$$S_1 = S'_1 + S''_1 + S'''_1,$$

$$\Sigma a_1^2 + \Sigma a_1'^2 + \Sigma a_1''^2 + \Sigma a_1'''^2 = 24\, l^2.$$

(A suivre.)

EXERCICE ÉCRIT

31. — Une conique Γ tangente à deux droites rectangulaires Δ,Δ′ admet, pour l'un de ses foyers, un point fixe F.

Trouver:

1° Le lieu du second foyer F′;

2° Le lieu des sommets appartenant à FF′.

Notes sur l'exercice 30.

Du point M (x_0, y_0) partent deux tangentes à la parabole; MA, MB. Les carrés de leurs longueurs sont les racines de l'équation

$$p^2z^4 - 2z^2(y_0^2 - 2px_0)(p^2 - 2px_0 + y_0^2) + 4(y_0^2 - 2px_0)^2\left[y_0^2 + \left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2\right] = 0.$$

Le diamètre correspondant au point M rencontrant la courbe en R, on sait que

$$2MR = \frac{y_0^2 - 2px_0}{p}.$$

On a donc, f étant le foyer,

$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{MB}^2 = 16\overline{MR}^2 \cdot \overline{Mf}^2,$$

ou

(1) $$Mf = \frac{MA.MB}{4MR}.$$

Puisque, par hypothèse, $\frac{MA.MB}{MR}$ est constant, le lieu demandé est une circonférence concentrique au foyer.

Remarque. — La relation (1) est intéressante ; on peut l'établir directement, par des considérations géométriques.

Nota. — Nous avons reçu une solution de cette question par M. Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun.

QUESTIONS RÉSOLUES

Théorème. — *Lorsqu'une hyperbole équilatère* H, *dont les asymptotes sont parallèles aux axes d'une conique à centre* Γ, *rencontre celle-ci aux points* A, B, C, D, *les points* B, C, D *et le point* A′, *symétrique de* A, *par rapport au centre de* Γ *sont quatre points situés sur une circonférence.*

Ce théorème connu, qui généralise le théorème de Joachimsthal, peut se démontrer de la manière suivante.

Prenons pour axes de coordonnées des axes de Γ; et soient, dans ce système, x', y' les coordonnées de A. Les courbes Γ et H sont représentées, respectivement, par les équations

(Γ) $$Ax^2 + By^2 = 1,$$

(H) $$xy + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

On a, d'ailleurs,

(1) $$Ax'^2 + By'^2 = 1,$$

(2) $$x'y' + \alpha x' + \beta y' + \gamma = 0.$$

De ces équations, on déduit

$$A(x^2 - x'^2) = - B(y^2 - y'^2),$$

$$(x - x')(y - y') + (x - x')(\alpha + y') = - (y - y')(\beta - x');$$

et, par suite,

$$(y + y')(y + \alpha) = \frac{A}{B}(x + x')(\beta + x').$$

On a, de même,

$$(x + x')(x + \beta) = \frac{B}{A}(y + y')(\alpha + y').$$

En ajoutant ces deux dernières égalités, le théorème en question se trouve démontré.

La marche adoptée dans cette démonstration est conforme

à celle qu'indique la méthode classique (Voyez *C. M. S.* p. 400); elle conduit, comme on le voit, à l'équation du cercle considéré, ce qui peut être avantageux dans certains cas. Mais si l'on veut simplement rétablir la proposition, on peut arriver plus vite au but, en raisonnant comme il suit.

L'équation

$$Ax^2 + By^2 - 1 + \lambda(xy + \alpha x + \beta y + \gamma) = 0$$

représente, pour une valeur convenable de λ, la conique *dégénérée*, constituée par les cordes AB, CD. Les directions asymptotiques de cette conique dégénérée sont données par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + \lambda xy = 0.$$

D'après cela, en appelant m', m'' les coefficients angulaires des droites AB, CD, on a

$$(1) \qquad m'm'' = \frac{A}{B}.$$

Soit μ le coefficient angulaire de BA', corde supplémentaire de BA; on a

$$(2) \qquad m'\mu = -\frac{A}{B}.$$

En comparant (1), (2), on a

$$\mu = -m''.$$

Les cordes BA', CD sont donc *isoscéliennes*, ce qui prouve que A', B, C, D, sont quatre points situés sur une circonférence.

Application. — On peut déduire de là, comme corollaire, un théorème de Steiner sur les cercles osculateurs. Le théorème auquel nous faisons allusion ici correspond à l'énoncé suivant :

Par tout point d'une conique à centre, on peut mener trois cercles osculateurs à la courbe (*); les points de contact de ces cercles, et le point considéré, sont quatre points d'une circonférence.

Si, en un point K (x', y'), d'une conique Γ, rapportée à ses

(*) Abstraction faite, bien entendu, de celui qui est osculateur au point considéré.

On trouvera, une démonstration de ce théorème de Steiner basée sur l'inversion et sur une propriété des cubiques circulaires; démonstration due au D[r] Ingram, dans le *Traité de Géométrie analytique* de Salmon (Courbes planes), p. 436.

axes, on trace un cercle osculateur à Γ, en ce point K; ce cercle rencontre Γ en trois points confondus avec K et en un quatrième point J (x'', y''). L'équation de KJ est, comme cela résulte d'une propriété connue,

$$\frac{y}{y'} + \frac{x}{x'} + 2 = 0.$$

On a donc
$$\frac{y''}{y'} + \frac{x''}{x'} + 2 = 0.$$

Si l'on suppose que J soit un point donné, et si l'on cherche le point K, on pourra dire que les coordonnées de ce point vérifient les équations :

$$Ax^2 + By^2 = 1, \qquad \frac{y''}{y} + \frac{x''}{x} + 2 = 0.$$

La première de ces équations est celle de la conique Γ; l'autre représente une hyperbole équilatère H, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de Γ.

D'ailleurs $x = -x''$, $y = -y''$ est une solution évidente de ces équations; le point diamétralement opposé ($x = x''$, $y = y''$) et les trois autres points (abstraction faite du point J, $x = -x''$, $y = -y''$) sont quatre points situés sur une circonférence, d'après le théorème que nous avons rappelé.

Remarque. — Les asymptotes de H ayant pour équations, respectivement,

$$x = -\frac{x''}{2}, \qquad y = -\frac{y''}{2},$$

et H passant par le centre de Γ et par le point J ($-x''$, $-y''$), on voit ainsi que les trois points d'osculation sont réels.

QUESTIONS D'EXAMENS

1. — Calculer
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

La méthode générale (Voyez C. M. S.; *Algèbre*, 2e édition, p. 646) donne

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

On a donc $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\text{arc tg}\sqrt{3} - \text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. — Démontrer que l'élimination des quantités x, y, z, ρ entre les équations :

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho, \qquad z = z_0 + \gamma\rho;$$
$$f(x,y,z) = 0, \qquad \varphi(x,y,z) = 0;$$

conduit à une équation homogène par rapport aux lettres α, β, γ.

Cette question se présente quand on cherche l'équation générale des surfaces coniques. Elle se démontre très simplement en observant que les égalités

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{r-r_0}{\gamma} = \rho,$$

peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{x-x_0}{\alpha'} = \frac{y-y_0}{\beta'} = \frac{r-r_0}{\gamma'} = \rho',$$

en posant $\alpha' = \alpha t, \quad \beta' = \beta t, \quad \gamma' = \gamma t, \quad \rho' = \frac{\rho}{t}$.

D'après cette remarque, si le résultant trouvé est $F(\alpha, \beta, \gamma)$ il sera aussi représenté par $F(\alpha', \beta', \gamma')$; c'est-à-dire par $F(t\alpha, t\beta, t\gamma)$, etc.

QUESTION 274

Solution par M. Aug. Poulain, à Angers.

M *et* M' *sont deux points qui, daus le plan du triangle* ABC, *ont pour coordonnées tripolaires respectivement* m, n, l *et* n, l, m ; *trouver le lieu de* M *et le lieu de* M'. (Em. Lemoine.)

1. — Rappelons d'abord qu'il existe une relation constante $J = 0$ entre λ, μ, ν, coordonnées tripolaires d'un point M. On a

(1) $J = \Sigma a^2\lambda^4 - 2\Sigma bc\cos A.\mu^2\nu^2 - 2abc\Sigma a\cos A.\lambda^2 + a^2b^2c^2 = 0.$

Nous savons (*J. S.* 1889, p. 155) qu'on peut écrire encore

(2) $J = (-\lambda_a^2 + \mu^2 b\cos C + \nu^2 c\cos B + abc\cos A)^2 - h_a^2[4\mu^2\nu^2 - (\mu^2 + \nu^2 - a^2)^2].$

2. — Posons

(3) $U = \mu^2 - \nu^2, \; V = \nu^2 - \lambda^2, \; W = \lambda^2 - \mu^2.$

Ces quantités, dont nous verrons plus loin le rôle important (9), peuvent être regardées comme des coordonnées, qu'on appellerait coordonnées cotripolaires (*). Il y a entre elles la relation U + V + W = o. On peut toujours mettre en évidence deux d'entre elles, à volonté, dans l'équation tripolaire d'une droite quelconque :

(4) $$l\lambda^2 + m\mu^2 + n\nu^2 + p = 0.$$

Car, à cause de $l + m + n = 0$, on peut écrire, par exemple,

(5) $$-mW + nV + p = 0 \ (**).$$

J peut s'écrire en fonction de W, V, λ

(6) $$J = b^2W^2 + c^2V^2 + 2bc \cos A.\, VW + 2abc\,(Wb \cos B - Vc \cos B) - 16S^2\lambda^2 + a^2b^2c^2,$$

où l'ensemble des trois premiers termes peut s'écrire encore, en éliminant $2bc \cos A$,

(7) $$-(a^2VW + b^2UW + c^2UV),$$

et représente, quand on l'égale à zéro, le cercle évanouissant, dont le centre est le point O.

(*) Quand leurs valeurs sont données, le point peut être construit graphiquement par les droites (3), c'est-à-dire par des perpendiculaires à deux côtés quelconques de ABC; ce qui fait le pendant des coordonnées trilinéaires et barycentriques qui donnent ordinairement chaque point par des transversales angulairés. Mais, si on veut déterminer λ, μ, ν analytiquement, il faut faire intervenir J = o. Il est important qu'on puisse ainsi s'en passer au point de vue graphique. C'est au fond cette méthode qu'a employée M. Lalbalettrier (*Trigon.* p. 148), pour trouver le centre du cercle

$$(\alpha + \beta + \gamma)\Sigma u\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

On a $$u = \lambda^2 - R_1^2, \qquad v = \mu^2 - R_1^2;$$

d'où $$u - v = \lambda^2 - \mu^2.$$

On peut aussi déduire de U, V, W les valeurs de x, y, z (*J. S.* 1889, p. 132, formule 62).

(**) De là, des simplifications de calcul pour les tripolaires. L'intersection de deux droites se ramène à résoudre deux équations du premier degré en W et V. Dès lors, la condition pour que trois droites tripolaires soient concourantes est

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} = 0.$$

De même, l'équation d'une droite passant par deux points M′, M″ est

$$\begin{vmatrix} W & V & 1 \\ W' & V' & 1 \\ W'' & V'' & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

et les formules (17) montrent facilement que le premier membre est l'aire du triangle MM′M″ multipliée par — 16S. Comme cas particulier, on retrouve ainsi S^2 en fonction de a, b, c.

3. — Cela posé, les coordonnées que l'énoncé attribue à M' s'obtiennent en permutant celles de M; cela rappelle l'opération qui donne le premier isobarique de M. La question est donc celle-ci : si l'on fait une permutation des coordonnées λ, μ, ν de M, le nouveau groupe (μ, ν, λ) ne répond pas, en général, à un point M'; car la relation $J = 0$ n'est pas vérifiée pour ce groupe. Si elle l'est, on demande le lieu de M. Nous verrons que c'est une hyperbole E_1, que nous appellerons *première* ou *directe*. Il est clair que M' jouit de la propriété que si l'on fait une permutation rétrograde de ses coordonnées, on retombe sur M, et dès lors sur un point existant. Le lieu de M' sera une hyperbole E_2, que nous appellerons *rétrograde*. Cette opération rétrograde revient, comme toujours, à faire successivement deux permutations directes. Il suffira d'étudier la première courbe. Il est clair que le point O appartient à chacune.

4. — *Le lieu de* M *se déduit de* $J = f(\lambda, \mu, \nu) = 0$, *en y faisant une permutation directe de* λ, μ, ν.

En effet, soit

(8) $$J_1 = f(\mu, \nu, \lambda) = 0,$$

l'équation trouvée. Puisque M' existe, on a entre ses coordonnées la relation $f(\lambda', \mu', \nu') = 0$. Mais, par hypothèse,

(9) $$\lambda' = \mu,\ \mu' = \nu,\ \nu' = \lambda.$$

En substituant ces valeurs, on trouve (8). On prouverait, de même, qu'inversement, tout point M satisfaisant à cette équation donne un point M'. L'équation est donc

(10) $$\Sigma a^2\mu^4 + \ldots + a^2b^2c^2 = 0.$$

De même, *le second lieu* E_2 *s'obtient par une permutation rétrograde* (*).

5. — L'inspection de l'équation (1) montre qu'au lieu de faire une permutation directe de λ, μ, ν, on peut faire une permutation rétrograde des éléments *a*, *b*, *c*, A,...

(*) Si M était défini par la condition qu'on trouvât un point M' en échangeant entre elles μ et ν, le lieu des deux points serait la médiatrice de BC. Car M et M' sont symétriques par rapport à cette droite et à la même distance λ de A. Le lieu est indéterminé pour $b = c$.

6. — *Le lieu de* M *est une conique bitangente à trois coniques remarquables. Elles ont* A, B, C *pour foyers, et chacune a pour longueur d'axe focal, le côté qui précède celui qui réunit ses foyers.* Nous les appellerons *coniques latérales directes* de A, B, C. Il y a de même trois coniques *rétrogrades*, relatives au lieu de M'.

En effet, d'après (2), l'équation peut s'écrire

(11) $$J_1 = P_b^2 - h_a^2 Q_b = o,$$

en posant

(12) $$P_b = - a\mu^2 + b\nu^2 \cos C + c\lambda^2 \cos B + abc \cos A,$$

(13) $$Q_b = 4\lambda^2\nu^2 - (\lambda^2 + \nu^2 - a^2)^2.$$

Or $P_b = o$ représente une droite (*J. S.* 1889, p. 3), $Q_b = o$ représente une conique répondant à l'énoncé. Car, pour $b < a$, cette équation est celle qu'on trouve en considérant l'ellipse qui correspond à l'équation $\lambda + \nu = a$, et en faisant des élévations au carré qui amènent λ^2 et ν^2. Pour $b > a$, c'est l'hyperbole dont l'équation est $\lambda - \nu = \pm a$. Si donc on revenait aux coordonnées cartésiennes, l'équation (11) exprimerait que le lieu est une conique bitangente à $Q_b = o$. Il y a deux autres décompositions analogues.

7. — Il y a donc pour E_1 et E_2 six cordes des contacts remarquables correspondant aux six coniques latérales. Étudions l'une des cordes; par exemple, celle qui a pour équation $P_b = o$. 1° La seule inspection des coefficients montre qu'elle est perpendiculaire à la droite

(14) $$\frac{\alpha}{c \cos B} = \frac{\gamma}{b \cos C};$$

qui est la cévienne obtenue en faisant avancer d'un rang les coordonnées γ, β dans l'équation de h_a; en un mot, c'est la première isobarique de cette hauteur; celle qui partage AC dans le même rapport. 2° Elle détermine sur la seconde médiatrice, à partir de O, et en adoptant le sens trilinéaire positif, un segment égal à $\frac{1}{2}\, b$ cotg A (*). 3° Le point où elle coupe

(*) Plus généralement, les formules (13) montrent que pour une droite quelconque $\Sigma l\lambda^2 + p = o$, les trois segments analogues égalent $\frac{-p}{4S}$ mul-

cette même médiatrice se projette en un point tel que, pour sa distance μ à B, on a $2\mu = h_a \cot \omega$; ce segment 2μ étant ainsi celui qui met en évidence sur BC la construction habituelle de Ω_1. En effet, si l'on coupe par la médiatrice $\lambda^2 = \nu^2$, on trouve $\mu^2 - \nu^2 = bc \cos A$, d'où l'on tire 2μ, en tenant compte de $\mu + \nu = a$. 4° Soient G_a le point où se coupent les deux directrices relatives aux foyers A, dans les deux coniques latérales directes; et G_b, G_c les deux points analogues. Je dis que *ce sont les trois sommets du triangle formé par les cordes de contact* P_b, ... Ainsi $P_b = o$ passe par G_a, car ce dernier point est sur les deux directrices (*).

(15) $$\nu^2 - \lambda^2 = a^2, \qquad \mu^2 - \lambda^2 = b^2.$$

Or ces valeurs de ν^2 et μ^2 vérifient l'équation $P_b = o$.

8. — Étudions maintenant les coniques latérales. *Deux d'entre elles, de systèmes opposés,* $Q_b = o$, $Q'_c = o$, *et de foyer* A, *ont leurs points communs sur la médiatrice de* a. Car leurs équations sont

$$\lambda + \nu = a, \qquad \lambda + \mu = a;$$

d'où

$$\mu = \nu.$$

On sait que deux coniques de même système: $Q_b = o$, $Q_c = o$, de foyer A, ont un couple de sécantes réelles communes issues de A. Ajoutons que, *pour les trois coniques, ces trois couples de sécantes forment des triples de droites concourantes et donnent ainsi naissance à un quadrangle. Chaque sommet de celui-ci a les trois autres pour points algébriquement associés par rapport aux côtés de* $G_aG_bG_c$.

Toutes ces propositions se ramènent à prouver que les sécantes communes, issues de G_a, ont pour équations

(16) $$P_b - P_c = o, \qquad P_b + P_c = o, \ldots$$

---

tipliée successivement par $\frac{a}{l}, \frac{b}{m}, \frac{c}{n}$; et que, pour toute courbe, on a aisément les segments qu'elle détermine sur les médiatrices, à partir de O.

(*) La conique AC a un cercle directeur de centre A dont le rayon est a. M. de Longchamps a étudié le centre radical des trois cercles analogues (*J. S.* 1886, p. 57) et montré qu'il est le symétrique de H par rapport à O. C'est le point $x : y : z = (\cos A - \cos B \cos C) : \ldots \equiv (-a^3 + b^3 \cos C + c^3 \cos B + abc \cos A) : \ldots$ Voir aussi M. Lemoine (*Association française*, 1888, p. 169. A la page 170, il faut supprimer les dénominateurs inexacts a, b, c).

Or, nous tirons du groupe (11):

$$P_b^2 - h_a^2 Q_b = P_c^2 - h_b^2 Q_c,$$

d'où

$$P_b^2 - P_c^2 = h_a^2 Q_b - h_b^2 Q_c.$$

Le second membre, égalé à zéro, représente une conique passant par l'intersection des deux autres. Par suite, il en est de même du premier membre. D'ailleurs, on obtient ainsi des droites issues de G_a,... Donc...

9. — Pour achever d'étudier la conique, le mieux est de passer aux coordonnées rectilignes. Pour cela, établissons le théorème suivant qui permet d'atteindre le *maximum de simplicité*, dans les calculs de transformation. Il n'y a même aucun calcul si l'équation tripolaire est préparée de manière à ne contenir que U, V, W (12).

Théorème. — *Il existe un système d'axes obliques tels que* W *et* V *soient proportionnels à* X *et* Y. *L'axe des* X *est la médiatrice dirigée vers le côté* AC *qui précède* A *et l'axe des* Y *est la médiatrice dirigée vers le côté suivant.*

On a

(17) $\quad W = -2c \sin A.X, \qquad V = 2b \sin A.Y.$

En permutant toutes les lettres, sauf X et Y, on trouve deux autres combinaisons analogues.

En effet, projetons M sur les trois côtés et appelons δ_a, δ_b, δ_c les distances de ces projections aux milieux des côtés. Ces distances seront prises positivement dans le sens alphabétique du périmètre. On voit géométriquement que

(18) $$V = \nu^2 - \lambda^2 = \left(\frac{b}{2} + \delta_b\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - \delta_b\right)^2 = 2b\delta_b,$$

$$W = 2c\delta_c, \; V = 2a\delta_a.$$

D'ailleurs,

(19) $\quad \delta_b = Y \sin A, \quad \delta_c = -X \sin A.$

10. — On peut de même réaliser le maximum de simplicité dans les calculs, pour le passage des tripolaires aux barycentriques. On y arrive par un changement du triangle de référence. Le nouveau triangle est un des homothétiques de

l'ancien triangle qui aurait tourné de $\pm \frac{\pi}{2}$. En effet, faisons mouvoir parallèlement à elle-même la médiatrice relative à a. Elle détermine, avec les deux autres médiatrices, un triangle OB_1C_1 directement semblable à ABC. Soit $a_1 = K_1 a$; K_1 étant positif ou négatif suivant que la droite s'est mue dans le sens direct BC ou en sens inverse. On a, en tenant compte des signes attribués à δ_b, δ_c, pour les coordonnées barycentriques absolues :

$$(20)\quad V = 2b\delta_b = -\frac{2}{K_1} b_1\delta_b = -\frac{4}{K_1}\beta_1, \quad W = -\frac{4}{K_1}\gamma_1,$$

ou

$$(21)\quad \frac{\beta_1}{V} = \frac{\gamma_1}{W} = -\frac{K_1}{4} = -\frac{S_1}{4K_1 S} = \frac{S_1 - \beta_1 - \gamma_1}{-4K_1 S - (W+V)} = \frac{\alpha_1}{U - 4K_1 S},$$

ce qui s'étend aux coordonnées relatives si l'on supprime trois rapports intermédiaires.

Il y a deux triangles analogues OA_2C_2, OB_3A_3, dont les formules s'obtiennent en permutant toutes les lettres de (20) et (21). Il est utile de considérer ces trois triangles dont l'ensemble forme une sorte de trèfle; car λ, μ, ν, étant connus, *chaque point* M *est ainsi donné, pour chaque groupe différent, par sept transversales issues du centre* O *et des six sommets*. Dans chaque cas on disposera des paramètres K_1, K_2, K_3 de manière à amener une simplification. Ex. :

Soit le sommet A pour lequel on a

(22)

$$\lambda = 0, \quad \mu = c, \quad \nu = b; \quad W = -c^2, \quad V = b^2, \quad U = c^2 - b^2.$$

Posons $K_1 = -\operatorname{cotg} C$; alors, que B_1 est le symétrique de O par rapport à AB. Il vient

$$\frac{\beta_1}{b^2} = \frac{\gamma_1}{-c^2} = \frac{\alpha_1}{a^2},$$

c'est-à-dire que A est algébriquement associé au point de Lemoine du premier triangle du groupe. On le vérifie facilement par des considérations d'angles. On aurait pu aussi disposer de K_1 pour rendre nul α_1. Alors, c'est la base même B_1C_1 qui passe par A.

11. — Un changement inverse, du triangle de référence, permet de passer des barycentriques aux tripolaires. On se sert des formules (20) et (21).

Les trois nouveaux triangles de référence, directement semblables à ABC et dont l'angle de rotation est droit, ont A, B, C pour centres de leurs cercles circonscrits ; les demi-angles en ces points permettent de les construire quand on a choisi l'éloignement d'un premier côté. Ils déterminent chaque point M par ses distances à neuf points, variant avec les paramètres ; ou par trois parallèles aux côtés de ABC.

12. — Pour appliquer ces formules à E_1, mettons W et V en évidence dans son équation. Elle se déduit (**5**) de la forme (6) de $J = o$, en y faisant rétrograder $a, b, c, A, \ldots$ Retranchant ensuite (6), il vient par la disparition de λ^2,

$$(23) \quad (a^2 - b^2)W^2 + (b^2 - c^2)V^2 - 2(c^2 - a^2)VW$$
$$- 4(a^2 - b^2)\,S \cot g\, C.W - 4(c^2 - b^2)\,S \cot g\, A.V = o.$$

Il ne reste plus qu'à substituer à W et V leurs valeurs cartésiennes ou barycentriques pour avoir les nouvelles équations de E_1, ce qui permet d'en achever facilement l'étude. On voit rapidement que c'est une hyperbole en remarquant que le coefficient

$$a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2).$$

Pour $b = c$, elle se réduit à la médiatrice $C'O(W = o)$, ce qui se voit *a priori;* et à

$$W + 2V - 4S \cot g\, C = o \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + \mu^2 - 2\nu^2 + 4S \cot g\, C = o,$$

perpendiculaire à la médiane issue de C et passant (note de **7**) par un point situé sur la médiatrice $C'O$ à une distance de O égale à $C'O$.

Pour avoir l'hyperbole E_2, il suffit de faire avancer a, b, c d'un rang, dans l'équation précédente. Car le premier membre de celle-ci est de la forme $J_1 - J$. Donc, la permutation directe de $a, \ldots$ le transforme en $J - J_2$. On verrait de même qu'en permutant en même temps U, V, W, on trouve deux autres formes pour chaque courbe.

13. — Dans toute équation tripolaire, on peut mettre W et V en évidence par un procédé analogue au précédent. On rem-

place μ^2 et ν^2 en fonction de λ^2 par leurs valeurs tirées de (3). On trouve ainsi $F(W, V, \lambda^2) = o$. Si λ^2 ne disparaît pas, comme cela est arrivé dans (5), on fait la même opération dans $J = o$, ce qui donne (6) et on élimine λ^2 entre les équations.

14. — Quand un des points M est donné, la définition de M′ permet de déduire graphiquement ce point, de M, au moyen de cercles dont les centres sont A, B, C. De plus, M et M′ *sont sur un même cercle de centre* G. Car tout cercle de cette espèce a une équation de la forme

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + K = o,$$

laquelle est vérifiée simultanément par (λ, μ, ν) et (μ, ν, λ), si ces deux points existent.

QUESTIONS PROPOSÉES

284. — $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ désignant, avec les conventions de la question 282 (p. 95), les angles sous lesquels on voit, de M, les côtés d'un triangle ABC, 1° prouver que (1) $\text{tang}\,\mathfrak{X} = \text{tang}\,\mathfrak{X}_1$ est l'équation angulaire d'un cercle latéral de M_1, c'est-à-dire du cercle circonscrit à M_1BC; et cela pour toute position de M_1; 2° entre $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ on a toujours la relation

(2) $$\text{tang}\,\mathfrak{X}_1 = -\,\text{tang}\,(\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Z}_1).$$

3° Réciproquement si l'on a cette relation entre trois angles positifs ou négatifs, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ numériquement plus petits ou plus grands que 180°, il existe un point M, tel que ses coordonnées ont mêmes tangentes que ces angles. Toutefois les valeurs *réalisées* pour les angles eux-mêmes ne sont pas toujours égales aux valeurs *proposées*. Le point M est unique, s'il n'est pas sur le cercle ABC. *(A. Poulain.)*

285. — Admettant les théorèmes des questions 282 et 284, montrer que : 1° si l'on remplace les trois cercles latéraux de M par leurs symétriques pris par rapport aux côtés correspon-

dants, les nouveaux cercles se coupent encore en un même point M′ (*); 2° si l'on prend les inverses M_1, M_1' de ces points M, M′, on a deux points tripolairement associés; et réciproquement. — Application de ce qui précède aux deux centres isogones V_2, W_2; 3° la droite qui joint les réciproques de M et M′ passe par un point fixe, comme celle qui joint les inverses.

(A. Poulain.)

286. — L'équation

$$Ax^m + mBx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}Ax^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}Bx^{m-3} + f_{m-4}(x) = 0,$$

dans laquelle $f_{m-4}(x)$ désigne une fonction entière, quelconque, du degré $m - 4$, a, au moins, deux racines imaginaires.

(G. L.)

287. — On donne, sur un même plan, une droite Δ et un cercle Γ fixes : soit Γ′ un second cercle mobile, de rayon invariable, tangent à Δ. Trouver :

1° L'enveloppe de l'axe radical δ des circonférences Γ et Γ′;

2° Le lieu du point de rencontre de δ avec la ligne des centres des circonférences Γ, Γ′. *(G. Russo.)*

288. — Quelle est, parmi les normales à une ellipse donnée, celle qui est la plus éloignée du centre de cette courbe ?

Même question pour un ellipsoïde. *(Mannheim.)*

(*) Cet associé de M est son *complémentaire* angulaire, car on l'obtient en cherchant le point dont les coordonnées sont $-\mathfrak{X}$, $-\mathfrak{Y}$, $-\mathfrak{Z}$. Or d'après la relation entre les trois coordonnées, on trouverait le même point, si l'on demandait que les coordonnées fussent $\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}, \ldots$

Le Directeur-gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 8848-4-90.

RECTIFICATION APPROXIMATIVE
DE L'ARC DE CERCLE

Par M. **A.-E. Pellet,** professeur à la Faculté des sciences de Clermond-Ferrand.

Soit AM un arc de cercle plus petit qu'un quadrant, dont le centre soit O; prolongeons le rayon AO d'une longueur OC égale au diamètre, de sorte que AC = 3R, R étant le rayon de l'arc; menons CM. Soit M' la rencontre de cette ligne avec la tangente en A; la ligne AM' est, sensiblement, égale à l'arc AM.

Désignons par a la mesure de l'arc AM, en parties du rayon R; alors

$$AM' = \frac{3 \sin a}{2 + \cos a} R.$$

Représentons par εR la différence *arc* AM — AM'; nous avons

$$\varepsilon = a - \frac{3 \sin a}{2 + \cos a}.$$

ε est une fonction de a dont la dérivée

$$\varepsilon' = \frac{(1 - \cos a)^2}{(2 + \cos a)^2}$$

est toujours positive; ε va donc en augmentant, lorsque a varie de o à $\frac{\pi}{2}$.

Pour $a = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - 1{,}5 < 0{,}0708$.

Pour $a = \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2\sqrt{2} + 1} < 0{,}00322 < \frac{1}{300}$.

Pour $a = \frac{\pi}{6}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{4 + \sqrt{3}} < 0{,}00023 < \frac{1}{4000}$.

La différence entre AM' et l'arc AM sera négligeable au

point de vue du dessin, pour $R < 1^m$, si a est plus petit que $\frac{\pi}{6}$; si $R < \frac{1^m}{10}$, la différence est négligeable, pourvu que a soit plus petit que $\frac{\pi}{4}$.

REMARQUE SUR LE QUADRANGLE HARMONIQUE
D'UNE CONIQUE

Par M. G. **Tarry.**

Nous dirons que quatre points A, B, C, D, pris sur une conique, forment un *quadrangle harmonique*, quand les droites menées de ces points à un cinquième point quelconque de la courbe forment un faisceau harmonique.

On démontrera très facilement le théorème suivant :

Deux droites conjuguées coupent une conique en deux couples de points A, B *et* C, D *qui forment un quadrangle harmonique; et réciproquement, si* ABCD *est un quadrangle harmonique, les droites* AB *et* CD *sont conjuguées.*

De cette propriété fondamentale du quadrangle harmonique, on peut déduire de nouvelles démonstrations de certains théorèmes concernant l'hyperbole équilatère. Exemples :

1° *Le lieu géométrique du sommet* A *d'un triangle* ABC, *de base fixe, dans lequel la différence des angles à la base est constante, est une hyperbole équilatère qui a pour centre le milieu de la base* BC.

La différence des angles à la base étant constante, les bissectrices de l'angle au sommet A ont des directions fixes.

Soient I et J les points fixes à l'infini sur ces directions.

Les droites qui joignent le point variable A aux points fixes B, C, I, J, forment un faisceau harmonique.

Par conséquent, le lieu du point A est une conique qui passe par les quatre points fixes B, C, I, J.

Cette conique est évidemment une hyperbole équilatère

dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle A.

Le quadrangle BCIJ étant harmonique, la droite BC est conjuguée de la droite à l'infini IJ et passe par conséquent par le centre de la courbe, pôle de la droite à l'infini.

Le centre de l'hyperbole équilatère est donc le point milieu du diamètre BC.

2° Réciproquement, si l'on joint un point A *d'une hyperbole équilatère aux extrémités* B *et* C *d'un diamètre de cette courbe, les bissectrices de l'angle* BAC *sont parallèles aux asymptotes.*

Soient I et J les points à l'infini de l'hyperbole.

Les droites BC et IJ sont évidemment conjuguées.

Par conséquent le quadrangle BCIJ est harmonique, et les quatre droites AB, AC, AI, AJ forment un faisceau harmonique.

Or les deux rayons AI, AJ, conjugués dans le faisceau, sont rectangulaires; par conséquent ils coïncident avec les bissectrices de l'angle BAC.

Ce qui démontre le théorème.

La question proposée sous le n° 281 revient à démontrer cette réciproque.

3° Soit A *un point arbitrairement choisi sur une hyperbole équilatère, et soient* B, C *les extrémités d'un diamètre quelconque de cette courbe. La tangente* AT *en* A *à cette hyperbole équilatère est symédiane du triangle* ABC. (Questions 135 et 267.)

Soient I, J les points à l'infini de l'hyperbole équilatère, et A′ le point diamétralement opposé à A dans la courbe.

Le quadrangle AA′IJ étant harmonique, les quatre droites AT, AA′, AI, AJ forment un faisceau harmonique, et les rayons conjugués rectangulaires AI, AJ sont les bissectrices de l'angle formé par les droites AT, AA′.

Les droites AI, AJ sont aussi les bissectrices de l'angle BAC.

Par conséquent les droites AT, AA′ sont conjuguées isogonales par rapport à l'angle BAC.

La droite AA′ est évidemment médiane du triangle ABC.

Donc la tangente AT est symédiane du triangle ABC (C. Q. F. D.).

REMARQUE. — La propriété fondamentale du quadrangle

harmonique, rappelée ci-dessus, peut être considérée comme un cas particulier de la propriété suivante. (Voir *Mathesis*, question 675.)

Le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D *d'une conique est égal à la racine carrée du rapport anharmonique du faisceau* P(ABCD) *qui a pour centre le pôle* P *de la droite* AB.

SUR UN GROUPE DE QUATRE CONIQUES REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **Auguste Boutin**,

(*Suite et fin*, voir p. 104.)

Théorème. — *Une droite quelconque coupe* (B_t) *en deux points* M_1, M_2, *et* OI *en un point* M_3 *dont les coordonnées se calculent par les formules :*

$$(M_1)\quad x(r + l_1 \cos A) = y(r + l_1 \cos B) = z(r + l_1 \cos C),$$

$$(M_2)\quad x(r + l_2 \cos A) = y(r + l_2 \cos B) = z(r + l_2 \cos C),$$

$$(M_3)\quad \frac{x}{r + l_3 \cos A} = \frac{y}{r + l_3 \cos B} = \frac{z}{r + l_3 \cos C}.$$

Montrer qu'entre l_1, l_2, l_3 *il existe la relation :*

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R} = 0.$$

L'équation de M_1M_2 est :

$$\Sigma x \left[\frac{1}{(r+l_1\cos B)\,(r+l_2\cos C)} - \frac{1}{(r+l_1\cos C)\,(r+l_2\cos B)}\right] = 0,$$

ou $\quad \Sigma x(r + l_1 \cos A)\,(r + l_2 \cos A)\,(\cos C - \cos B) = 0.$

Si on écrit que M_3 est sur cette droite, on a la relation :

$$\Sigma(r + l_1 \cos A)\,(r + l_2 \cos A)\,(r + l_3 \cos A)\,(\cos C - \cos B) = 0.$$

Si on développe, en observant que

$$\Sigma(\cos B - \cos C) = 0,$$

$$\Sigma \cos A\,(\cos B - \cos C) = 0,$$

cette relation se réduit à :

$$r(\Sigma l_1 l_2)\,\Sigma \cos^2 A\,(\cos C - \cos B) + l_1 l_2 l_3\,\Sigma \cos^3 A\,(\cos C - \cos B) = 0.$$

Mais :

$$\Sigma\cos^2 A(\cos C-\cos B)=(\cos C-\cos B)(\cos B-\cos A)(\cos C-\cos A),$$

$$\Sigma \cos^3 A (\cos C - \cos B) =$$

$$(\cos C - \cos B)(\cos B - \cos A)(\cos C - \cos A)(\cos A + \cos B + \cos C);$$

la relation cherchée se réduit encore à :

$$r\Sigma\, l_1 l_2 + l_1 l_2 l_3\, \Sigma \cos A = 0,$$

et comme $\Sigma \cos A = 1 + \dfrac{r}{R}$,

on l'obtient enfin sous la forme indiquée.

Si l'on appelle l le paramètre d'un point de (B_1) ou de OI, et que, dans la relation précédente, fondamentale, on fasse $l_1 = - l_2$, il vient

$$\frac{1}{l_3} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R} = 0.$$

Cette valeur de l_3 correspond au point Ψ, intersection de OI et $\Gamma\nu$. Donc : *La droite qui joint deux points de l'hyperbole* (B_1), *ayant des paramètres égaux et de signes contraires, passe par le point* Ψ *de* OI.

Ce point Ψ joue donc, par rapport à (B_1), un rôle analogue à celui qui est joué par K, dans l'hyperbole de Kiepert.

De même : *La droite qui joint un point quelconque de* OI *au point de* (B_1) *dont le paramètre est égal et de signe contraire, passe par un point fixe* Ψ_2 *de* (B_1).

Soient, de même, l_1, l_2, l_3, les paramètres des trois points suivant lesquels une droite quelconque coupe la conique $(B_{i'})$, et la droite OI′. Un calcul analogue à celui qui précède donne, pour la relation entre l_1, l_2, l_3:

$$r'[\cos^2 A(\cos B - \cos C) + \cos^2 B(\cos A + \cos C) - \cos^2 C(\cos A + \cos B)]\Sigma l_1 l_2$$
$$+ l_1 l_2 l_3[\cos^3 A(\cos B - \cos C) - \cos^3 B(\cos A + \cos C) + \cos^3 C(\cos A + \cos B)] = 0.$$

La seconde quantité entre crochets est le produit de la première par $\cos A - \cos B - \cos C$. On a donc:

$$r'\Sigma l_1 l_2 + l_1 l_2 l_3 (\cos A - \cos B - \cos C) = 0,$$

ou

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} + \frac{1}{r'} - \frac{1}{R} = 0.$$

Si, dans cette relation, on fait $l_1 = - l_2$, on a :

$$\frac{1}{l_3} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r'},$$

le point Ψ_a (*) correspondant est à l'intersection de OI' et de $\Gamma'_a\gamma'_a$, le second point $\Psi_{a,2}$ inverse du précédent est également intéressant.

On voit que : *la droite qui joint deux points de l'hyperbole* $(B_{I'})$, *ayant des paramètres égaux et de signes contraires, passe constamment par le point fixe* Ψ_a *de* OI'.

La droite qui joint un point quelconque de $(B_{I'})$, *au point de* OI' *dont le paramètre est égal et de signe contraire, rencontre la courbe en un second point fixe; c'est* $\Psi_{a,2}$.

Calculons les distances de O à un point quelconque M de OI déterminé par son paramètre.

$$R^2 - \overline{OM}^2 = \frac{abc\Sigma a(r + l\cos B)(r + l\cos C)}{[\Sigma a(r + l\cos A)]^2}$$
$$= \frac{R^2(2Rr + 2Rl + l^2)}{(R + l)^2};$$

d'où
$$OM = \frac{R.OI}{R + l}.$$

Si M_1 a même paramètre que M, mais pris en signe contraire,
$$OM_1 = \frac{R.OI}{R - l};$$

d'où
$$\frac{2}{OI} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{OM_1},$$

donc *deux points de* OI, *dont les paramètres sont égaux et de signes contraires, partagent harmoniquement la distance* OI.

On a
$$IM = \frac{l.OI}{R + l};$$

d'où
$$\frac{OM}{IM} = \frac{R}{l},$$

rapport simple, qui permet de construire immédiatement le point M.

Les formules précédentes donnent :
$$\overline{O\Psi}^2 = \frac{(R + r)^2(R - 2r)}{R},$$
$$\overline{I\Psi}^2 = \frac{r^2(R - 2r)}{R}.$$

(*) Les coordonnées de Ψ_a sont données par :
$$\frac{x}{\cos B + \cos C} = \frac{y}{\cos A - \cos C} = \frac{z}{\cos A - \cos B}.$$

On a : $\overline{O\Psi}^2 - \overline{I\Psi}^2 = R^2 - 4r^2,$

$$OJ = \frac{(2R + r)OI}{2R + 3R},$$

$$IJ = \frac{2r.OI}{2R + 3r}.$$

Il résulte, de ces formules, que *si un triangle se déforme de manière à rester à la fois inscrit et circonscrit à deux cercles fixes, la droite qui joint son point de Nagel à son point de Gergonne pivote autour d'un point fixe de la ligne des centres. Dans le même mouvement le point* J *de tous ces triangles est fixe.*

Un calcul identique montre que deux points de OI′, dont les paramètres sont égaux et de signes contraires, partagent harmoniquement la distance OI′.

Il existe des propriétés analogues pour OI″, OI‴.

VOLUME DU TÉTRAÈDRE EN AXES OBLIQUES

Si, dans un système d'axes (λ, μ, ν) on désigne par X_i, Y_i, Z_i les coordonnées d'un point A_i, le volume V du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est donné par la formule

$$\text{(A)} \qquad V = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta_0}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

dans laquelle

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut, de bien des façons, établir cette formule.

1° Si l'on désigne par x_i, y_i, z_i les coordonnées du point A_i dans un système rectangulaire, on sait que ces coordonnées sont des fonctions linéaires des quantités X_i, Y_i, Z_i. La formule connue

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

prouve que V est une fonction entière et du troisième degré des coordonnées X_i, Y_i, Z_i. D'ailleurs le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 \end{vmatrix} (*),$$

exprime, lorsqu'il est nul, que les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont dans un plan. Ainsi $\Delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que le volume V soit nul. On peut donc poser

$$V = k\Delta,$$

k désignant un coefficient *indépendant* des coordonnées des sommets.

Appliquons cette formule au tétraèdre Θ dont les sommets sont, outre l'origine, des points situés sur les axes OX, OY, OZ, à des distances de O égales à l'unité. Nous avons alors

$$V_1 = k\Delta_1.$$

D'ailleurs, par une formule connue,

$$\Delta_1 = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta_0},$$

et comme $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

on a, finalement $$k = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta_0},$$

et $$V = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta_0}.\Delta.$$

2° La formule, qui donne la distance d'un point à un plan, prouve que les hauteurs, et par suite les volumes de deux tétraèdres de même base

ABCD, A'BCD

sont entre eux comme les déterminants tétraédraux correspondants.

Cette remarque est générale et s'applique à deux tétraèdres quelconques

ABCD, A'B'C'D'.

(*) Pour abréger, nous donnons plus loin, à cette expression, le nom de *déterminant tétraèdral.*

En effet, considérons les tétraèdres

ABCD, ABCD′, ABC′D′, AB′C′D′ A′B′C′D′

dont les volumes sont

$$V,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V';$$

et soient $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta'$

les déterminants tétraèdraux correspondants. D'après la remarque faite plus haut, nous avons

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1},\quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2},\quad \frac{V_2}{V_3} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3},\quad \frac{V_3}{V'} = \frac{\Delta_3}{\Delta'},$$

et, par suite,

$$\frac{V}{V'} = \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

En appliquant cette relation au tétraèdre proposé ABCD et au tétraèdre Θ, considéré plus haut, on retrouve la formule (A).

3° Considérons d'abord un tétraèdre ayant pour sommet l'origine et pour base un triangle $A_1A_2A_3$.

Désignons par $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$ les cosinus *directifs* des droites OX, OY, OZ, par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, de même origine. On a

$$V_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

et, par conséquent,

$$V_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \alpha_1x_1+\alpha_2y_1+\alpha_3z_1, & \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3, & \gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3 \\ \alpha_1x_2+\alpha_2y_2+\alpha_3z_2, & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_1x_3+\alpha_2y_3+\alpha_3z_3, & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

ou

$$V_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

D'ailleurs

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = \Delta_0.$$

Ainsi

$$V_1 = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta_0}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Pour obtenir le volume du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, transportons les axes au point A_4, parallèlement à eux-mêmes, et nous avons

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta_0}\begin{vmatrix} x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4, & y_2 - y_4, & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4, & y_3 - y_4, & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

C'est, sous une autre forme, la formule (A).

EXERCICE

Par M. **A. Boutin.**

Le lieu géométrique des réciproques, d'ordre quelconque, de tous les points d'une conique circonscrite à un triangle, est une ligne droite.

En coordonnées barycentriques, l'équation d'une conique circonscrite est :

(1) $$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}=0.$$

Si α', β', γ' sont les coordonnées barycentriques d'un point du lieu, on a :

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^p}+\frac{\beta\beta'}{b^p}+\frac{\gamma\gamma'}{c^p}.$$

En éliminant α, β, γ, on a :

$$\frac{A\alpha'}{a^p}+\frac{B\beta'}{b^p}+\frac{C\gamma'}{c^p}=0.$$

Équation d'une droite.

COROLLAIRES. — 1° *La conique circonscrite est l'hyperbole de Kiepert :*

a) La transformée par réciproques, d'ordre 0, est une droite KH_0 qui joint le point de Lemoine au réciproque de l'orthocentre.

b) La transformée par réciproques, d'ordre 1, est une droite joignant le centre du cercle inscrit au point : $a^3 : b^3 : c^3$.

c) La transformée par réciproques, d'ordre 2 *(points inverses)* est une droite joignant le point de Lemoine au point $a^4 : b^4 : c^4$.

2° *La conique est le cercle circonscrit.*

a') La transformée par réciproques, d'ordre 0, est la droite de Longchamps, transversale réciproque de la droite de Lemoine.

b') La transformée par réciproques, d'ordre 1, est la droite harmoniquement associée au point I_0, transversale réciproque de l'axe antiorthique.

c') La transformée par réciproques, d'ordre 3, est l'axe antiorthique, droite qui passe par les pieds des bissectrices extérieures.

d') Enfin la transformée par réciproques, d'ordre 4, donne la droite de



Lemoine et celle des réciproques, d'ordre 5, la droite harmoniquement associée au point ($a^3 : b^3 : c^3$).

3° *La conique est l'ellipse minimum.*

a'') La transformation par réciproques, d'ordre 1, conduit à l'axe antiorthique.

b'') Et celle par réciproques, d'ordre 2, à la droite de Lemoine.

4° *La conique circonscrite est celle qui a pour tangentes en* A, B, C, *les bissectrices extérieures.*

a''') La transformée par réciproques, d'ordre 0, est la droite harmoniquement associée au point I_0;

b''') Celle de l'ordre 2, conduit à l'axe antiorthique;

c''') Et enfin celle de l'ordre 3, à la droite de Lemoine.

Remarque. — A la proposition énoncée plus haut correspond une réciproque:

La transformée par points réciproques, d'ordre quelconque, d'une droite du plan d'un triangle est une conique circonscrite à ce triangle.

Remarque. — La transformation par points réciproques, d'ordre quelconque, rentre d'ailleurs dans le genre des transformations quadratiques pour lesquelles, comme on sait, à une droite correspond une conique passant par trois points fixes. En associant deux points réciproques d'ordre quelconque, on voit qu'à une conique remarquable, circonscrite au triangle de référence, correspondra, pour chaque ordre de points réciproques, une droite remarquable; et réciproquement.

CORRESPONDANCE

M. G. Tarry nous a adressé la lettre suivante :

J'ai l'honneur de vous adresser une petite Note (*) concernant le *quadrangle harmonique* dans les coniques. Le théorème fondamental que je rappelle est connu. Chasles l'énonce ainsi (*Traité des sections coniques*, page 102) :

Lorsqu'un angle est circonscrit à une conique, si par son sommet on mène une transversale qui coupe la courbe en deux points, les droites menées d'un point quelconque de la courbe à ces points sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites menées du même point aux points de contact des deux côtés de l'angle.

(*) C'est la note que nous publions plus haut, p. 122.

Ce théorème intéressant n'a pas été, semble-t-il, suffisamment utilisé.

Je m'en sers, dans la Note, pour donner les démonstrations d'un théorème connu et pour présenter une solution des questions 267 et 281, concernant l'hyperbole équilatère.

QUESTIONS D'EXAMEN

1. — Construire la courbe U représentée par l'équation

(1) $$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 1}}{x + 1},$$

On peut construire cette courbe, point par point, de la manière suivante : Considérons l'hyperbole H qui correspond à l'équation

(2) $$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Ayant pris $OA' = OA = AB = BC = 1$, on voit que H a pour asymptotes les droites Ox, OC; de plus, elle passera par B; on peut donc la construire point par point.

Cela posé, les égalités (1), (2) donnent

$$\frac{y}{1} = \frac{Y}{x + 1}.$$

Fig. 1.

Soit M un point de H; le point correspondant M', de la courbe U, s'obtiendra, d'après cette égalité, et comme l'indique la figure, en traçant A'M et en menant par le point R, où elle rencontre Oy, une parallèle à Ox. Cette dernière droite rencontre l'ordonnée de M au point cherché M'.

2. — Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$y = x^2 - 4x + 3 \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

La courbe présente la forme générale indiquée par la figure. On peut

la construire, point par point, au moyen d'une parabole et d'une hyperbole équilatère auxiliaires, en observant que si l'on pose

$$Y_1 = x_2 - 4x + 3,$$
$$Y_2 = \sqrt{x^2 - 1},$$

on a $y = Y_1 \pm Y_2$.

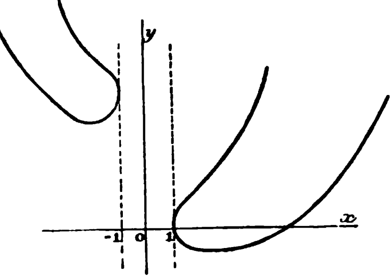


Fig. 2.

On peut aussi l'obtenir, tangente par tangente, en appliquant la propriété que nous avons indiquée (*), pour un cas plus général, et que nous rappellerons ici rapidement.

Deux courbes étant données U, V; si, sur l'ordonnée ABC, on prend AD = BC, le lieu de D est une courbe W dont on peut construire la tangente en D, de la manière suivante : soit D' le point qui, sur W, correspond à l'ordonnée A'B'C'; la droite BB' rencontre Ox en R et le point est, sur Ox, la projection du point d'intersection des droites AA', DD'.

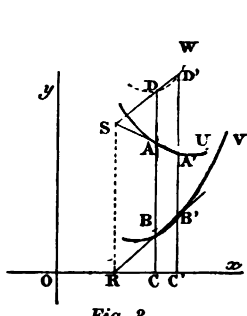


Fig. 3.

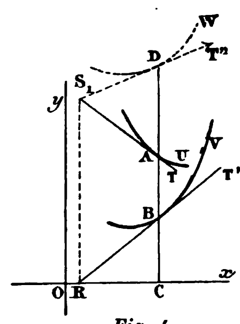


Fig. 4.

En passant à la limite, on obtient un point S, de la tangente cherchée en traçant BT', tangente en B, à V, jusqu'à sa rencontre en R_1 avec Ox. La parallèle à Oy, menée par R_1, rencontre la tangente AT à la courbe U, au point A, en S_1; la droite S_1D est la tangente cherchée.

3. — Construire la courbe Γ correspondant aux équations:

$$x = a + m \cos \varphi + n \sin \varphi,$$
$$y = b + p \cos \varphi + q \sin \varphi;$$

φ désignant un paramètre variable.

En général, toutes les courbes représentées par les équations

$$x = f_1(\cos \varphi, \sin \varphi) \qquad y = f_2(\cos \varphi, \sin \varphi),$$

(*) Voyez *Journal* 1885, p. 155.

dans lesquelles f_1, f_2 sont des fonctions rationnelles de sin φ et de cos φ, sont des unicursales dont le degré se voit immédiatement en ayant recours aux formules

$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}.$$

D'après cette remarque, Γ est une conique. D'ailleurs elle n'a pas de points à l'infini, c'est donc une ellipse. Son équation, en coordonnées cartésiennes, est

$$(px - ny - qa + nb)^2 + (px - my - pa + mb)^2 = (mq - np)^2.$$

On peut observer que le point a, b est le centre de Γ, et que

$$qx - ny - qa + nb = 0, \qquad px - ny - pa + nb = 0,$$

représentent deux diamètres conjugués de cette courbe.

4. — Déduire, des propriétés connues de l'intersection de deux coniques, que l'équation en S ne peut pas admettre de racines imaginaires.

Soit
$$\varphi(x, y, z) + \varphi_1 + \varphi_0 = 0$$
l'équation d'une quadrique.

Les équations, $\varphi(x, y, z) = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$: représentent, en coordonnées homogènes, des coniques; l'une d'elles, au moins, étant une courbe imaginaire, les quatre points communs sont imaginaires. Par suite l'équation de λ, obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme ternaire

$$\varphi(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

a ses racines réelles, donc, etc.

5. — Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite Δ s'appuyant sur les droites G_1, G_2, G_3 qui correspondent aux équations

$$(G_1) \qquad \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1},$$

$$(G_2) \qquad \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2},$$

$$(G_3) \qquad \frac{x - x_3}{a_3} = \frac{y - y_3}{b_3} = \frac{z - z_3}{c_3}.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point du lieu ; une droite G passant par ce point étant représentée par les équations

$$(G) \qquad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

en exprimant que G rencontre G_1, on a

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & a_1 & \alpha \\ y_0 - y_1 & b_1 & \beta \\ z_0 - z_1 & c_1 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

En appliquant cette relation successivement à G_2, G_3 on obtient l'équation du lieu en éliminant α, β, γ entre (1) et les deux égalités analogues.

En développant (1) et en remplaçant x_0, y_0, z_0 par les coordonnées courantes x, y, z, on a

$$\alpha(c_1y_1 - b_1z_1 + b_1z - c_1y) + \beta(a_1z_1 - c_1x_1 + c_1x - a_1z) + \gamma(b_1x_1 - a_1y_1 + a_1y = b_1x) = 0.$$

L'équation du lieu est donc

$$0 = \begin{vmatrix} c_1y_1 - b_1z_1 + b_1z - c_1y & a_1z_1 - c_1x_1 + c_1x - a_1z & b_1x_1 - a_1y_1 + a_1y - b_1x \\ c_2y_2 - b_2z_2 + b_2z - c_2y & \dots & \dots \\ c_3y_3 - b_3z_3 + b_3z - c_3y & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est en apparence du troisième degré ; mais il est facile d'observer qu'il s'abaisse au second degré, parce que l'on a

$$\begin{vmatrix} b_1z - c_1y & c_1x - a_1z & a_1y - b_1x \\ b_2z - c_2y & c_2x - a_2z & a_2y - b_2x \\ b_3z - c_3y & c_3x - a_3z & a_3y - b_3x \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, en prenant le terme en z_2x par exemple, le déterminant correspondant a deux colonnes à éléments proportionnels. Quant aux termes en xyz, ils disparaissent, car les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} b_1z & c_1x & a_1y \\ b_2z & c_2x & a_2y \\ b_3z & c_3x & a_3y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -c_1y & -a_1z & -b_1x \\ -c_2y & -a_2z & -b_2x \\ -c_3y & -a_3z & -b_3z \end{vmatrix},$$

sont identiques, au signe près.

Le lieu est donc du second degré, conformément au résultat connu.

UN ERRATUM A LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE

Un correspondant du Journal, M. Maridet, de Moulins, a bien voulu appeler mon attention sur une erreur matérielle que j'ai commise au § 138 de mon *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre* (V. *Journal*, 1888, p. 247).

La formule (*)

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

utilisée *(loc. cit.)* est exacte ; mais, par une erreur matérielle, j'ai pris, pour l'appliquer, la table de la p. 716 du traité de M. Bertrand, au lieu de celle qui est en regard, à la p. 717.

Il suit de là que le nombre 3,315 (p. 247, l. 3) doit être remplacé par 2,93492 ; de même (p. 248, l. 4), au lieu de 3,70814, il faut lire 2,70128.

(*) Cette formule se trouve démontrée dans tous les traités de Calcul intégral. Voyez, notamment, l'ouvrage de M. Bertrand (§ 395). Par une erreur d'impression, il faut *(loc. cit.)* lire

$$x = a \sin \varphi, \qquad y = b \cos \varphi$$

au lieu de

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = a \sin \varphi.$$

Les conséquences tirées des résultats numériques erronés que nous venons de corriger cessent naturellement d'être exactes. Les bassins elliptiques que l'on doit considérer pour les substituer aux bassins de forme carrée, de même aire, devraient avoir une excentricité plus faible que celle qui correspond aux ellipses que nous avions choisies (*).

G. L.

EXERCICE ÉCRIT

32. — D'un point M mobile sur une strophoïde droite S on peut mener, abstraction faite de la tangente en M, deux tangentes à la courbe, MP, MP'.

1° Trouver les points de S pour lesquels ces tangentes sont réelles;

2° Démontrer que le lieu du milieu de PP' est la parallèle à l'asymptote menée par le nœud;

3° Déterminer l'enveloppe de PP';

4° On demande enfin quel est le lieu du centre du cercle

(*) M. Maridet nous a communiqué, à ce propos, les notes qu'il a fait paraître dans le *Bulletin technologique de la Société des anciens élèves des Écoles nationales d'Arts et Métiers*.

Dans l'une d'elles, se trouve la formule

$$\frac{D}{2} = 2a + M - \sqrt{M^2 - 6{,}2772b^2},$$

dans laquelle D désigne la longueur d'une ellipse dont les demi-axes sont a, b; M désigne une quantité que l'on doit préalablement calculer au moyen de l'égalité

$$M = 2{,}5011b + 0{,}8191a.$$

En appliquant cette formule au premier exemple numérique examiné ci-dessus, M. Maridet trouve 2,9350, qui ne diffère, du nombre 2,93492, donné par la table de M. Bertrand, que d'une quantité moindre que 0,0001.

On sait qu'il existe un grand nombre de formules empiriques destinées à rectifier l'ellipse, avec une certaine approximation. Une des plus simples est celle de M. Boussinesq

$$D = \pi\left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right];$$

mais cette formule, comme l'observe M. Maridet (*Bulletin technologique*, mars 1890), n'est applicable, si l'on veut une approximation un peu forte, qu'aux ellipses dont l'excentricité est très faible.

circonscrit au triangle MPP′ et quelle est l'enveloppe de ce cercle. *(A. Bernheim.)*

Notes sur l'exercice 31.

Prenons pour origine le point F et pour axe polaire la parallèle à Δ, menée par F. Soit S un point du lieu; soient $2a$ la longueur de l'axe focal, $2c$ la distance des foyers; ρ, ω étant les coordonnées polaires de S, on a

$$\rho = a + c.$$

Si nous projetons F en P, Q sur les droites Δ, Δ′ on sait que les distances des points P, Q au centre de Γ sont égales à a.

On a donc, en désignant par α, β les longueurs FP, FQ,

(1) $a^2 = (\alpha + c\cos\omega)^2 + c^2\sin^2\omega = (\beta + c\sin\omega)^2 + c^2\cos^2\omega.$

Par suite $$2c = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta\sin\omega - \alpha\cos\omega}.$$

Les égalités (1) donnent encore

$$(a - c)\rho = \alpha\beta\,\frac{\alpha\sin\omega - \beta\cos\omega}{\beta\sin\omega - \alpha\cos\omega}.$$

Finalement, l'élimination des paramètres a, c donne l'équation polaire du lieu cherché

(A) $\alpha^2 - \beta^2 = \rho(\beta\sin\omega - \alpha\cos\omega) - \dfrac{\alpha\beta}{\rho}(\alpha\sin\omega - \beta\cos\omega);$

ou, en coordonnées cartésiennes,

(2) $$(x^2 + y^2)(\beta y - \alpha x + \beta^2 - \alpha^2) = \alpha\beta(\alpha y - \beta x).$$

Le lieu considéré est une cubique circulaire: l'asymptote réelle correspond à l'équation

$$\beta y - \alpha x + \beta^2 - \alpha^2 = 0.$$

C'est une droite passant par le point O ($x = -\alpha$, $y = -\beta$) commun aux droites données Δ, Δ′ et symétrique de OF par rapport à la bissectrice des droites Δ, Δ′.

La courbe qui correspond à l'équation (2) se construit facilement. Elle se compose d'un ovale isolé et d'une branche serpentine. Les points remarquables où elle coupe les droites Fx, Fy, Δ, Δ′ se trouvent, *a priori*, par des considérations géométriques.

Remarque.— Le lieu des seconds foyers est une droite. On peut le vérifier analytiquement, en éliminant a, c entre les équations (A) et l'équation $\rho = 2c$. On peut aussi observer que les coniques Γ peuvent être considérées comme tangentes à quatre droites fixes: Δ, Δ′ et les droites isotropes passant par F. Le théorème de Newton indique alors que le lieu des centres de Γ est une droite. Il en est de même, par conséquent, du lieu décrit par le second foyer, homothétique au lieu du centre.

On peut encore démontrer cette propriété en observant, comme nous l'avons fait plus haut, que le centre appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de PQ.

Nota. — Nous avons reçu de M. Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun, une solution de cet exercice, basée sur l'emploi des coordonnées cartésiennes.

CONCOURS GÉNÉRAL

(2 juin 1890.)

Mathématiques spéciales.

On donne une surface du second degré S, un point fixe A sur cette surface et une conique C située dans le plan P. Les trois droites qui joignent le point A aux points A_1, A_2, A_3, d'un triangle T situé dans le plan P, rencontrent respectivement la surface S en des points a_1, a_2, a_3, autres que A.

1° Démontrer que ce plan $a_1\ a_2\ a_3$ passe par un point fixe M quand le triangle T se déplace dans le plan P. en restant conjugué par rapport à la conique C;

2° Trouver le lieu décrit par le point M, quand la conique C varie, en restant circonscrite à un quadrilatère donné;

3° Trouver le lieu décrit par le même point M, quand C varie en restant inscrite dans un quadrilatère donné.

QUESTIONS 142 ET 143

Par M. **H. Brocard.**

En un point M *d'une conique on construit le cercle osculateur. Soit* N *le point où il rencontre une seconde fois la conique. Trouver : 1° le lieu du pôle de la corde* MN *par rapport au cercle; 2° l'enveloppe de la tangente en* N *au cercle; 3° l'enveloppe du rayon du cercle qui passe par N.* (J. Neuberg.)

Plusieurs questions relatives à la corde commune à l'ellipse et à son cercle osculateur ont été traitées dans les *Nouvelles Annales* (nos 1081, 1088, 1089, 1090, 2e série, t. XII, 1873, pp. 29-41).

φ désignant l'anomalie excentrique du point M, la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos\varphi - \frac{y}{b}\sin\varphi = \cos 2\varphi.$$

Identifiant avec celle de la polaire d'un point P(α, β), c'est-à-dire

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1,$$

on trouve, pour coordonnées du pôle P de la corde NM:

$$\alpha = a\,\frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi},$$

$$\beta = -\,b\,\frac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi};$$

d'où
$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = \frac{a^2b^2}{\cos^2 2\varphi},$$

$$\frac{2\alpha\beta}{ab} = -\,\text{tang}\ 2\varphi.$$

L'équation du lieu est

$$(a^2y^2 - b^2x^2)^2 = a^2b^2(a^2y^2 + b^2x^2).$$

La courbe correspondante, formée de quatre branches hyperboliques, se construit facilement.

2° et 3°. — En vertu de propriétés connues, l'anomalie excentrique du point N est -3φ. Par conséquent, ses coordonnées ont pour expressions

$$(\text{N})\ \begin{cases} x = a\cos 3\varphi, \\ y = -\,b\sin 3\varphi, \end{cases}$$

Le centre C du cercle osculateur a pour coordonnées

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi,$$

$$y = -\,\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi.$$

D'après cela, l'équation de CN est

$$y + b\sin 3\varphi = \frac{a}{b}\,\frac{b^2\sin 3\varphi - c^2\sin^3\varphi}{c^2\cos^3\varphi - a^2\cos 3\varphi}\,(x - a\cos 3\varphi)$$

La tangente NT a pour équation

$$y + b\sin 3\varphi = \frac{b}{a}\,\frac{a^2\cos 3\varphi - c^2\cos^3\varphi}{b^2\sin 3\varphi - c^2\sin^3\varphi}\,(x - a\cos 3\varphi).$$

La suite du calcul ne paraît pas devoir aboutir à un résultat simple.

Nota. — La question 143 *(J. N.)* pourra être traitée de la même manière.

Remarque. — L'enveloppe des cordes MN est une courbe U, unicursale, du sixième ordre et de la quatrième classe, présentant quatre points de rebroussement, etc. Aux renseignements qu'on trouvera *(loc. cit.)* on peut ajouter la remarque suivante.

Les coordonnées x, y, d'un point μ, de U, sont données par les formules

$$x = a\cos\varphi(2\sin^2\varphi + 1), \qquad y = b\sin\varphi(2\cos^2\varphi + 1).$$

On en déduit

$$\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b\sin\varphi} = 4.$$

Le point μ appartient donc à une droite passant par M′, telle que OM′ $= 2$OM et, de plus, isoscélienne de OM. On peut, d'après cette remarque, construire U *point par point.*

L'élimination de φ entre les formules (1) donne les relations

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = (\sin\varphi + \cos\varphi)^3, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = (\cos\varphi - \sin\varphi)^3$$

desquelles on déduit l'équation donnée par Salmon *(Higher planes curves,* p .106).

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.$$

G. L.

QUESTION 193

Solution, par M. Lévy, élève au Lycée de Nancy.

On considère l'hyperbole H *dont l'équation est*

$$xy - 2\beta x - 2\alpha y + 2\alpha\beta = 0; \qquad \textit{(Axes rect.)}$$

et l'on demande :

1° Le lieu des centres des coniques ζ *qui touchent les axes* Ox, Oy, *et qui, en outre, sont doublement tangentes à* H.

Ce lieu se compose d'une droite Δ *et d'une hyperbole équilatère* K;

2° Soit V *les coniques du réseau* ζ, *qui ont leurs centres sur* K. *Trouver le lieu des projections de* O *sur la droite qui, pour une conique* V, *passe par ses points de contact avec les axes; et aussi le lieu des projections de* O *sur les cordes de contact de* V *avec* H;

3° On propose enfin ces deux dernières questions pour les coniques V, *du réseau* ζ, *qui ont leurs centres sur* Δ. (G. L.)

En observant que l'équation générale des coniques bitangentes à deux coniques ($f = 0$, $f_1 = 0$) est

$$4\rho^2\lambda f + (\rho^2 P + Q)^2 = 0,$$

où λ représente une racine de l'équation en λ qui correspond aux coniques données; $P = 0$, $\Phi = 0$, étant les équations des sécantes communes correspondant à cette valeur de λ, on voit qu'on a deux groupes de coniques du réseau ζ:

(U) $\quad 4\rho^2 xy + [2\rho^2(x - \alpha) - (y - \beta)]^2 = 0,$

(V) $\quad 4\mu^2 xy - [\mu^2(\beta x + \alpha y - \alpha\beta) + 2]^2 = 0.$

Cherchons le lieu des centres des coniques du premier

groupe. Différentions (U) par rapport à x, puis par rapport à y; nous avons

$$2y + [2\rho^2 (x - \alpha) - (y - \beta)] = 0,$$
$$2\rho^2 x - [2\rho^2 (x - \alpha) - (y - \beta)] = 0.$$

En éliminant ρ^2, il vient

$$(x - \alpha)(y - \beta) - \alpha\beta = 0.$$

Le lieu est donc une hyperbole équilatère K, dont les asymptotes sont parallèles aux axes, et dont le centre est au milieu de la droite qui joint l'origine au centre de H.

Le lieu des centres des coniques (V) est donné par

$$2y - \beta [\mu^2 (\beta x + \alpha y - \alpha\beta) + 2] = 0,$$
$$2x - \alpha [\mu^2 (\beta x + \alpha y - \alpha\beta) + 2] = 0.$$

Éliminant μ^2, on a

1° $$\alpha y - \beta x = 0.$$

Ainsi le lieu des centres est une droite passant par l'origine, par le centre de H et par celui de K;

2° Considérons les coniques (V); la droite qui passe par leurs points de contact avec les axes a pour équation

$$2\rho^2 (x - \alpha) - (y - \beta) = 0.$$

La perpendiculaire abaissée de l'origine est donc représentée par

$$x + 2\rho^2 y = 0.$$

L'équation du lieu est

$$x(x - \alpha) - y(y - \beta) = 0,$$

c'est-à-dire une hyperbole équilatère, facile à construire.

En observant que l'équation V peut encore s'écrire :

$$4\rho^2(xy - 2\beta x - 2\alpha y + 2\alpha\beta) - [2\rho^2(x - \alpha) + (y - \beta)]^2 = 0,$$

on voit que la corde des contacts de V avec H est

$$2\rho^2(x - \alpha) + (y - \beta) = 0.$$

La perpendiculaire, abaissée de O, étant représentée par

$$x - 2\rho^2 y = 0,$$

l'équation du lieu des points de rencontre de ces deux droites est

$$x(x - \alpha) + y(y - \beta) = 0.$$

La courbe correspondante est un cercle qui passe par l'origine et dont le centre est au point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

3° Considérons enfin les coniques (V). Les cordes de contact de ces coniques, avec les axes d'une part; puis, avec H, d'autre part, sont

$$\mu^2(\beta x + \alpha y - \alpha\beta) + 2 = 0,$$
$$\mu^2(\beta x + \alpha y - \alpha\beta) - 2 = 0;$$

elles ont une direction constante, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur chacune d'elles est la droite S.

NOTA. — Solutions par MM. Troille, élève au lycée de Grenoble; Leinekugel (solution géométrique), élève au lycée Charlemagne; et Roux (Solution analytique et géométrique), élève au lycée de Grenoble.

QUESTION 202

Par M. **E. Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

On donne une ellipse fixe ayant F, F′ *pour foyers; une parabole a son foyer en* F *et est tangente à l'ellipse. Lieu du sommet* S *de cette parabole lorsqu'elle se déforme?*

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soient M le point de contact, K le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur la tangente en M, O le centre de l'ellipse. Le point K appartient aussi à la tangente au sommet S de la parabole considérée.

D'après les propriétés connues de l'ellipse et de la parabole, MF′ est parallèle à l'axe FS de la parabole et KO est parallèle à MF′; donc KO et KS sont perpendiculaires. KS est donc la tangente au cercle décrit de O, comme centre, avec KO pour rayon; mais K appartient au lieu des perpendiculaires abaissées du foyer F de l'ellipse sur ses tangentes, c'est-à-dire que KO est égale au demi-grand axe de l'ellipse. Il suit de là que S est le lieu des perpendiculaires abaissées de F sur les tangentes à la circonférence qui a pour diamètre le grand axe de l'ellipse. C'est donc un *limaçon de Pascal.*

SOLUTION ANALYTIQUE

Soit α l'angle que fait la direction EF′ avec la direction SF; l'équation de l'ellipse sera

$$\rho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega}.$$

Celle de la parabole :

$$\rho = \frac{\lambda}{1 - \cos(\omega + \alpha)},$$

F étant le pôle et FF′ la direction de l'axe polaire.

On exprime que les deux courbes sont tangentes en égalant les deux valeurs de ρ, ce qui donne

$$(\lambda c - b^2 \cos\alpha)\cos\omega + b^2 \sin\alpha \sin\omega = a\lambda - b^2.$$

Cette équation, de la forme

$$A\cos\omega + B\sin\omega = C,$$

aura ses racines en ω égales, si l'on a :

$$A^2 + B^2 - C^2 = 0.$$

On trouve alors $\lambda = 2(a - c\cos\alpha)$.

L'équation générale des paraboles tangentes à l'ellipse, ayant F pour foyer, est donc :

$$\rho = \frac{2(a - c\cos\alpha)}{1 - \cos(\omega + \alpha)}.$$

Mais pour le point S on a

$$\omega = \pi - \alpha,$$

d'où

$$\alpha = \pi - \omega;$$

substituant dans la valeur de ρ, il vient

$$\rho = a + c\cos\omega.$$

Cette équation représente bien le *limaçon de Pascal*, que nous avons trouvé géométriquement. L'ellipse fixe ayant F, F pour foyers peut être remplacée par une hyperbole, le lieu est encore un limaçon de Pascal; les démonstrations sont analogues.

Remarquons le théorème suivant, très facile à démontrer géométriquement :

Si une ellipse ou une hyperbole variable dont le grand axe ou l'axe transverse a une longueur fixe, est constamment tangente à une parabole fixe avec laquelle elle a un foyer commun, le lieu du second foyer est une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole.

M. Blancheur, élève au lycée Louis-le-Grand nous a adressé une solution géométrique de cette question, analogue à celle qu'on vient de lire.

NOTA. — Cette question n'est pas nouvelle. Elle a été proposée par Chasles, dans les *Nouvelles Annales* 1844 (p. 194). Une généralisation, également proposée par Chasles, se trouve (*loc. cit.* 1846, p. 672).

QUESTIONS PROPOSÉES

289. — Si l'on désigne par U, la fonction du second degré à trois variables

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D;$$

par H, le discriminant de cette fonction rendue homogène; par Δ, celui de l'ensemble des termes du second degré; par $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$, les mineurs qui, dans Δ, correspondent respectivement à A, A', A'', B, B', B''; enfin, par V, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta''z - \beta'y + B'C' - B''C'' + \sqrt{H} & \beta'x - \alpha z + BC' - A'C'' & \alpha y - \beta''x + A''C' - BC'' \\ \alpha'z - \beta y + AC'' - B'C & \beta x - \beta''z + B''C'' - BC + \sqrt{H} & \beta''y - \alpha'x + B'C'' - A''C \\ \beta z + \alpha''y + B''C - AC' & \alpha''x - \beta'z + A'C - B''C' & \beta'y - \beta x + BC - B'C' + \sqrt{H} \end{vmatrix};$$

on a

$$V \equiv \Delta\sqrt{H}U.$$

(A. Tissot.)

290. — Par l'intersection de deux quadriques de révolution on ne peut faire passer d'autres quadriques de révolution que si leurs axes sont rectangulaires ou parallèles.

S'ils sont rectangulaires, on n'en peut faire passer qu'une : les axes des trois quadriques sont rectangulaires deux à deux.

S'ils sont parallèles, on en peut faire passer une infinité ; le lieu des foyers de leurs méridiennes est une cubique plane.

(E. Amigues.)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11918-5-90.

THÉORÈME DE D'ALEMBERT

Par M. **E. Amigues.**

Soit f(z) *un polynôme à coefficients réels ou imaginaires. Si ce polynôme ne se réduit pas à une constante, on peut trouver au moins une valeur réelle ou imaginaire* z_0, *de* z, *telle que le module de* $f(z_0)$ *soit moindre que tout nombre donné.*

Imaginons que l'on donne à z_0 toutes les valeurs réelles ou imaginaires, et considérons les carrés de tous les modules des quantités $f(z)$ ainsi obtenues. On voit facilement qu'on peut calculer deux nombres positifs α et β dont la différence soit plus petite que tout nombre donné ε, et qui comprennent entre eux les plus petits de ces carrés; soit z_0 l'une des valeurs de z fournissant l'un de ces plus petits carrés.

En désignant par u une expression imaginaire quelconque et en posant

$$f(z_0) = a_0 + b_0 i,$$

on a
$$f(z_0 + u) = a_0 + b_0 i + \Sigma u^p(a_p + b_p i).$$

Puisque le polynôme n'est pas une constante, les coefficients des diverses puissances de u ne sont pas tous nuls. Soit q la plus petite valeur de p pour laquelle le coefficient de u^p n'est pas nul.

En posant
$$u = \rho(\cos \omega + i \sin \omega),$$
on obtient

$$f(z_0 + u) = a_0 + \rho^q(a_q \cos q\omega - b_q \sin q\omega) + \dots$$
$$+ i[b_0 + \rho^q(a_q \sin q\omega + b_q \cos q\omega) + \dots].$$

Si donc l'on appelle m^2 le carré du module de $f(z_0 + u)$, et si l'on ordonne la quantité m^2 suivant les puissances croissantes de u, on a :

$$m^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2\rho^q$$
$$(a_0 a^q \cos q\omega - a_0 b_q \sin q\omega + b_0 a_q \sin q\omega + b_0 b_q \cos q\omega) + \dots$$

Je dis que le coefficient de ρ^q ne peut avoir une valeur finie pour aucune valeur $\omega = \omega_1$. Car, soit A une pareille valeur, finie. Pour $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{q}$, on aurait la valeur $-$ A. L'une de ces

deux valeurs est négative. Supposons par exemple que ce soit A. On aurait alors, pour ρ quelconque, et pour $\omega = \omega_1$:

$$m^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2A\rho^{q+1} + \dots$$

$$m^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2A\rho\left[1 + \frac{B}{2A}\rho + \dots\right].$$

On peut calculer un nombre positif α tel que, pour toute valeur de ρ, moindre que α, la quantité placée dans le crochet soit compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ par exemple. Le carré du module m^2 pourrait donc subir une diminution *finie*, ce qui est impossible.

Ainsi le coefficient de ρ^q doit être infiniment petit pour toute valeur de ω, en particulier pour $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$; ce qui prouve que les quantités

$$a_0a_q + b_0b_q,$$
$$-a_0b_q + b_0a_q,$$

sont infiniment petites; et, par suite, que la somme de leurs carrés

$$(a_0^2 + b_0^3)(a_q^2 + b_q)$$

est aussi infiniment petite. Donc le premier facteur est infiniment petit (*).

SUR LA POLAIRE RÉCIPROQUE DE L'ÉPICYCLOÏDE

Par M. **Svéchnicoff**, Professeur au Gymnase de Troïtzk (Russie).

On sait que les équations de l'épicycloïde sont

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = (n+1)\cos\zeta - \cos(n+1)\zeta, \\ \dfrac{y}{a} = (n+1)\sin\zeta - \sin(n+1)\zeta; \end{cases}$$

(*) Dans les *Nouvelles Annales*, j'ai traité le cas où il existe une valeur z_0 telle que, pour z quelconque, on ait

$$\text{mod } f(z_0) \leqslant \text{mod } f(z).$$

Je me suis borné à ajouter une indication vague pour le cas où il n'en est pas ainsi. Ce cas se rencontre lorsqu'il n'y a que des racines incommensurables; au fond, c'est le cas général.

La présente démonstration traite ce cas général, dans lequel l'autre se trouve compris.

formules dans lesquelles ζ représente un paramètre variable; a désigne le rayon du cercle roulant et n le rapport du rayon du cercle fixe au rayon a.

L'équation de la tangente en un point M (x, y) de la courbe, est

$$Y - y = (X - x) \operatorname{tg} \frac{n+2}{2}\zeta,$$

ou

$$(2) \quad X \sin \frac{n+2}{2}\zeta - Y \cos \frac{n+2}{2}\zeta - (n+2)a \sin \frac{n}{2}\zeta = 0.$$

Désignons par ξ, η, les coordonnées du pôle N de cette tangente, relativement à la circonférence qui a pour équation

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

L'équation de la polaire du point N, par rapport à cette circonférence, est

$$(4) \qquad x\xi + y\eta - r^2 = 0.$$

Les équations (2), (4) représentant la même droite, on a

$$(5) \quad \frac{\xi}{\sin \frac{n+2}{2}\zeta} = - \frac{\eta}{\cos \frac{n+2}{2}\zeta} = \frac{r^2}{(n+2)a \sin \frac{n}{2}\zeta}.$$

Telles sont les équations qui déterminent la polaire réciproque de l'épicycloïde. Rapportons la courbe aux coordonnées polaires, en posant

$$\xi = \rho \cos \omega, \qquad \eta = \rho \sin \omega.$$

Les équations (5) donnent

$$\frac{n+2}{2}\zeta = \frac{\pi}{2} + \omega,$$

$$\rho = \frac{r^2}{(n+2)a \sin \frac{n}{2}\zeta}.$$

Par suite, $\rho = \dfrac{r^2}{(n+2)a \sin \dfrac{n(\pi + 2\omega)}{2(n+2)}}.$

Faisons tourner l'axe polaire, autour du pôle, d'un angle $\frac{\pi}{n}$, et posons

$$\omega = \theta + \frac{\pi}{n}, \qquad \rho = u.$$

Alors, nous aurons

$$(6) \qquad u = \frac{r^2}{(n+2)a\cos\dfrac{n\theta}{n+2}} = b\,\text{séc}\,\frac{n\theta}{n+2}.$$

Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes à l'épicycloïde est une courbe ayant pour équation

$$(7) \qquad u = \frac{r^2}{(n+2)a}\cos\frac{n\theta}{n+2} = b\cos\frac{n\theta}{n+2}.$$

Les courbes (6) et (7) sont inverses par rapport à la circonférence décrite de l'origine, comme centre, avec b pour rayon.

Considérons la courbe (6).

Si n est un entier, il exprime le nombre d'asymptotes et de points doubles de cette courbe.

Désignons par u l'angle OMT, formé par le rayon vecteur et la tangente; soient t la sous-tangente OF, U l'aire comprise entre la courbe et deux rayons vecteurs; on a

$$U = \frac{b^2}{2}\int\frac{d\omega'}{\cos^2\dfrac{n\omega'}{n+2}} = \frac{(n+2)b^2}{2n}\,\text{tg}\,\frac{n\omega'}{n+2},$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{nb}{n+2}\sin\frac{n\theta}{n+2}\sec^2\frac{n\theta}{n+2},$$

$$\text{tg}\,\mu = \frac{n+2}{n}\,\text{cotg}\,\frac{n\theta}{n+2},$$

$$t = \frac{n+2}{n}\,b\,\text{cosec}\,\frac{n\theta}{n+2}.$$

En posant $\theta = \dfrac{(n+2)\pi}{2n} - \omega'$,

on a

$$(8) \qquad t = \frac{n+2}{n}\,b\sec\frac{n\omega'}{n+2}.$$

Ainsi *le lieu géométrique des points* T *est une courbe semblable à la courbe* (6).

La polaire réciproque de la courbe (8) est l'épicycloïde à n rebroussements, pour laquelle le rayon du cercle roulant est égal à $\dfrac{na}{n+2}$.

En outre, la polaire réciproque du lieu géométrique des points T est la développée de l'épicycloïde (1).

Par conséquent, *la développée de l'épicycloïde est une épicycloïde semblable.*

Nous retrouvons ainsi un résultat bien connu.

(A suivre.)

SUR LES PARABOLES DE M. ARTZT

Un triangle ABC étant considéré, il existe une parabole P_a passant par les points B, C tangentiellement aux droites AB, AC. Soient P_b, P_c les deux paraboles analogues (*).

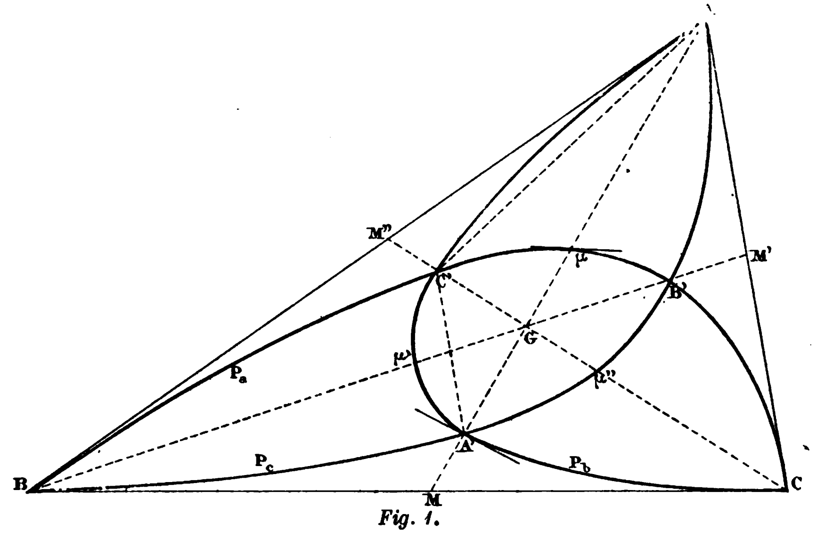


Fig. 1.

Les équations des paraboles P_b, P_c *(coordonnées barycen-*

(*) Ces paraboles ont été signalées par M. Artzt, dans le *Programme du Gymnase de Rechlinghausen*, 1884. Le lecteur pourra se reporter, à ce sujet, aux sources suivantes :

Journal de Mathématiques spéciales, 1885, p. 76.

Mathesis, 1884 (questions 341, 350) ; résolues 1885, p. 163 (avec une rectification, portant sur la seconde partie de la question 350).

Mémoires de l'Académie de Montpellier, 1886.

Nouvelles Annales, 1885, p. 211, § 4.

triques) sont :

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0, \qquad \gamma^2 - 4\alpha\beta = 0.$$

Abstraction faite du point A, elles admettent un autre point réel A′; nous allons montrer que les tangentes, en A′, aux courbes P_b, P_c sont, respectivement, parallèles aux médianes CM″, BM′. De cette remarque nous déduirons les aires des triangles curvilignes, formés par les paraboles considérées.

Les coordonnées α_0, β_0, γ_0 du point A′, vérifient les égalités

$$4\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0,$$

La tangente à P_b, en A′, a pour équation

$$\beta\beta_0 - 2\alpha\gamma_0 - 2\gamma\alpha_0 = 0,$$

ou

$$2\alpha - \beta + \frac{\gamma}{2} = 0.$$

On vérifie, sans peine, (*) que la droite correspondante est parallèle à CM″, droite qui est représentée par l'équation

$$\alpha - \beta = 0.$$

Cette remarque conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Les paraboles de M. Artzt se coupant deux à deux aux points* A′, B′, C′, *les aires des triangles curvilignes qu'elles déterminent sont données par les formules :*

$$AC'B' = CA'B' = BA'C' = \frac{17}{81} ABC,$$

$$AC'B = BA'C = CB'A = \frac{5}{81} ABC.$$

On sait que l'aire d'un segment parabolique est les $\frac{4}{3}$ de celle du triangle qui a pour base la corde du segment et pour sommet le point de l'arc le plus éloigné de cette corde.

Or, sur l'arc AC′B′, le point C′, comme nous venons de le voir, est tel que la tangente en ce point est parallèle à AA′. On a donc

$$\textit{aire du segment } AC'A' = \frac{4}{3} AC'A'.$$

(*) En coordonnées barycentriques, les équations

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0, \qquad m'\alpha + n'\beta + p'\gamma = 0,$$

représentent deux droites parallèles, si l'on a

$$\frac{m - n}{m' - n'} = \frac{n - p}{n' - p'},$$

(Voyez *Supplément*, 2e édition, p. 168.)

On sait d'ailleurs, ou l'on vérifie sans peine, que

$$CC' = 8M''C'.$$

D'après cela :

$$AC'G = \frac{1}{9} ABC, \qquad A'C'G = \frac{1}{27} ABC;$$

et, par suite, $$A'C'A' = \frac{4}{27} ABC.$$

On voit aussi que

$$\textit{aire du segment } AC'A' = \frac{16}{81} ABC.$$

De même, $$\textit{aire du segment } AB'A' = \frac{16}{81} ABC.$$

Ces égalités donnent

(1) $$\textit{aire } AC'A'B' = \frac{32}{81} ABC.$$

Mais on sait (*) que

(2) $$\textit{aire } A'C'B' = \frac{5}{27} ABC.$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\textit{aire } AC'B' = \frac{17}{81} ABC.$$

Enfin, les trois triangles formés par les côtés de ABC et par les arcs de parabole étant équivalents (**), on a

$$3 \textit{ fois aire } AC'B + 3 \textit{ fois aire } AC'B' + \textit{aire } A'B'C' = ABC;$$

ou, finalement, $$\textit{aire } AC'B = \frac{5}{81} ABC.$$

Les paraboles de M. Artzt mettent en lumière une certaine ellipse U, du plan du triangle; cette ellipse passe par les points *réels* communs à ces trois paraboles; en outre, son centre coïncide avec le centre de gravité G du triangle. Les dimensions de cette ellipse peuvent être déterminées comme nous allons l'indiquer.

Si, par C', on mène une parallèle à la médiane BB', cette droite coupe AA' en un point A'', symétrique de A' par rapport

---

(*) Voyez *Mathesis (loc. cit.)*. La proposition en question se démontre très simplement en observant que la parabole de M. Artzt, correspondant au côté BC, passe par le point μ, milieu de AM et que la tangente en ce point est parallèle à BC et, par suite, à B'C'.

(**) Pour le montrer, il suffit de considérer le triangle proposé comme la projection orthogonale d'un certain triangle équilatéral.

à G (*). L'ellipse que nous considérons est donc, d'après cette remarque, circonscrite à un hexagone H (A'B'C'A"B"C"), dont les côtés sont parallèles aux diagonales.

En considérant ABC comme la projection orthogonale d'un triangle équilatéral, on voit que U est la projection d'une

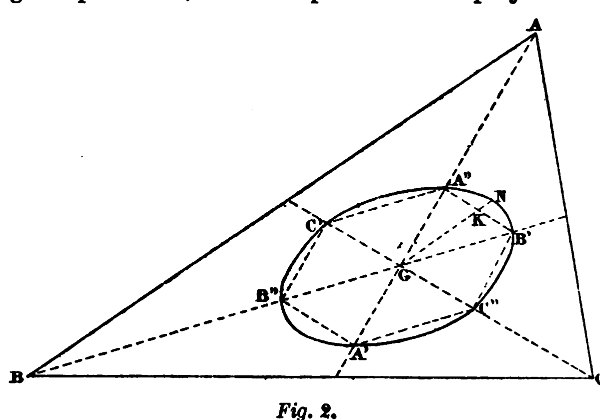


Fig. 2.

circonférence U' circonscrite à un hexagone régulier H', correspondant à H. Appelons ρ le rayon de cette circonférence.

Soient α, β les demi-axes de U; on a

$$\frac{\pi\alpha\beta}{\pi\rho^2} = \frac{aire\ H'}{6\rho^2 \frac{\sqrt{3}}{4}},$$

ou

$$\alpha\beta = \frac{2}{3\sqrt{3}}\ aire\ H'.$$

En observant que

$$aire\ H' = 6\ fois\ aire\ C'GA'' = 6 . \frac{2}{27}\ ABC = \frac{4}{9}\ ABC,$$

on a

$$(1) \qquad \alpha\beta = \frac{8}{27\sqrt{3}} . ABC.$$

Pour déterminer encore α, β, cherchons $\alpha^2 + \beta^2$.

Soit K le milieu de A"B'; GK rencontre U en N, et l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = \overline{C'G}^2 + \overline{GN}^2.$$

(*) On vérifie facilement cette propriété en observant que, C' étant le centre de gravité de AGB, BC' passe par le milieu de AG.

Mais, en se reportant à la circonférence U′, envisagée ci-dessus, on voit que

$$\frac{GN}{GK} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On a donc $\alpha^2 + \beta^2 = \overline{C'G}^2 + \frac{4}{3}\overline{GK}^2.$

Un calcul facile donne, finalement,

(2) $$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{81}.$$

Les formules (1) et (2) font connaître les dimensions de l'ellipse U (*); ellipse déterminée par son centre qui, comme on l'a vu, est le centre de gravité G du triangle ABC et par trois points qui sont les centres de gravité des triangles GAB, GBC, GCA (**). *(G. L.)*

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1890 (***)

Solution par M. G. Leinekugel, élève au Lycée Charlemagne.

Nous nous appuierons, pour résoudre cette question, sur les deux propriétés suivantes :

I. *Lorsqu'il existe un triangle inscrit à une conique* (C′) *et conjugué par rapport à une autre conique* (C) *il en existe une infinité (Traité des sections coniques de Chasles, chap. VII, p. 140.)*

II. *Étant données deux coniques* (C), (C′), *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un triangle conjugué par rapport à* (C) *et qui soit inscrit à* (C′) *est* $\Theta = 0$ (****) *(Salmon, Géométrie plane, covariants).*

(*) Sauf erreur dans le calcul que nous avons fait, l'équation de cette ellipse remarquable, en coordonnées barycentriques, est

$$8(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 11(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha).$$

(**) On trouvera dans le numéro de juillet du *Journal de Mathématiques élémentaires* (p. 149) une démonstration du théorème relatif à l'expression du paramètre des paraboles considérées dans cette note.

(***) Voyez l'énoncé, p. 138.

(****) Voyez plus loin la signification de Θ.

D'ailleurs, ces propriétés sont projectives.

Cela posé, prenons A pour origine; un plan parallèle au plan P, comme plan des xy. Les équations de C seront

$$(C) \begin{cases} z = h \\ ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \end{cases}$$

L'équation de la quadrique (S) est

$$(S) \quad Ax^2 + A'y^2 A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z = 0.$$

Si l'équation du plan $a_1a_2a_3$ est

$$ux + vy + wz - 1 = 0,$$

l'équation du cône dont le sommet est A, et dont la base est la conique de section de ce plan avec S, sera

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$+ 2(Cx + C'y + C''z)(ux + vy + wz) = 0.$$

Ce cône sera coupé par le plan P suivant une conique C' circonscrite à $A_1A_2A_3$.

Projetons les deux coniques sur le plan des xy nous obtiendrons les équations des coniques (C), (C').

$$(C) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

$$(C') \begin{cases} (A + 2Cv)x^2 + 2xy(B'' + C'u + Cv) + y^2(A' + 2C'v) \\ +2hx(B'+C''v+Cw)+2hy(B+C''v+C'w)+(A''+2C''w)h^2=0 \end{cases}$$

qui vérifient la relation $\Theta = 0$ (*).

En désignant par α, β, γ, δ, ε, φ les mineurs du discriminant de (C) qui correspondent aux éléments a, b, c, d, e, f, on a

$$\Theta = \alpha(A + 2Cv) + \ldots$$

et, par conséquent,

$$0 = u(2C\alpha + C'\beta + C''h\delta) + v(2C'\gamma + C\beta + C''\varepsilon h) + w(2C''\varphi h$$
$$+ C'\varepsilon + C\delta)h + A\alpha + A'\gamma + B''\beta + B'\delta h + B\varepsilon h + A''\varphi h^2,$$

(*) Lorsque les équations des deux coniques considérées sont (notations de Salmon, chap. XVIII).

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$
$$S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy = 0,$$

le discriminant de $\lambda S + S'$ est

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta',$$

Δ, Δ' étant, respectivement, les discriminants des formes S, S'; les coefficients Θ, Θ' étant donnés par les formules

$$\Theta=(bc-f^2)a'+(ca-g^2)b'+(ab-h^2)c'+2(gh-af)f'+2(hf-bg)g'+2(fg-ch)h'$$
$$\Theta'=(b'c'-f'^2)a+\ldots$$

On voit que dans l'expression de Θ, les coefficients des quantités a', b', c', f', g', h' sont les mineurs du discriminant Δ.

relation qui montre que *le plan* $a_1a_2a_3$ *passe par le point fixe* M *dont les coordonnées sont*

$$(1)\qquad \frac{x}{2C\alpha + C'\beta + C''h\delta} = \frac{y}{2C'\gamma + C\beta + C''\varepsilon h}$$
$$= \frac{z}{(2C''\varphi h + C\delta + C'\varepsilon)h} = -\frac{1}{\Theta_1},$$

en posant

$$\Theta_1 = A\alpha + A'\gamma + B''\beta + B'\delta h + B\varepsilon h + A''\varphi h^2.$$

REMARQUE I. 1° Si Θ_1 est nul, auquel cas la conique de section de (S), par le plan P, est circonscrite à un triangle conjugué par rapport à C, le plan $a_1a_2a_3$ est parallèle à une droite fixe.

2° Si la conique C varie dans le plan P, en restant circonscrite à un quadrilatère fixe, les coefficients de son équation ponctuelle sont des fonctions linéaires d'un seul paramètre λ. Par suite, d'après les relations

$$\alpha = ac - b^2, \ldots$$

les quantités α, β, ... sont des fonctions, du second degré, de ce paramètre λ. Les coordonnées de M sont donc données par les formules

$$\frac{x}{a_1 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_3} = \frac{y}{b_1 + \lambda b_2 + \lambda^2 b_3} = \frac{z}{c_1 + \lambda c_2 + \lambda^2 c_3} = \frac{1}{\theta_1 + \lambda\theta_2 + \lambda^2\theta_3},$$

λ étant le seul paramètre variable.

Conséquemment, on voit que *le lieu de* M *est une conique* située dans le plan représenté par

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ y & b_1 & b_2 & b_3 \\ z & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Si la conique C reste constamment inscrite à un quadrilatère fixe, alors, α, β, ... qui représentent, comme on sait, les coefficients de son équation tangentielle, sont des fonctions linéaires d'un seul paramètre μ; et l'on a, pour déterminer les coordonnées du point M, les formules

$$\frac{x}{\alpha_1 + \mu\alpha_2} = \frac{y}{\beta_1 + \mu\beta_2} = \frac{z}{\gamma_1 + \mu\gamma_2} = \frac{1}{t_1 + \mu t_2},$$

dans lesquelles μ est le seul paramètre variable : ainsi, dans ce cas, *le lieu de* M *est une droite.*

Remarque II. De ce qui précède, on peut conclure que si les coniques C se déforment, dans le plan P, de manière que les coefficients de son équation tangentielle soient des fonctions de degré m d'un seul paramètre; le lieu du point M sera, en général, une courbe gauche d'ordre m. De même, lorsque les coefficients de son équation ponctuelle seront des fonctions, de degré m, d'un seul paramètre, le lieu du point sera, en général, une courbe gauche, d'ordre $2m$.

D'après les formules (1), on voit encore que, si la conique C reste fixe, la quadrique passant constamment par l'intersection de deux quadriques fixes passant en A, le lieu de M sera une droite.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Des considérations géométriques simples mettent en évidence les résultats précédents.

1° Les droites AA_1, AA_2, AA_3 sont trois diamètres conjugués par rapport au cône Σ de sommet A et de base C; donc, d'après le théorème de Frégier, le plan $a_1a_2a_3$ passe par un point M situé sur la droite qui joint le point A au pôle, par rapport à C, de la droite Δ, trace sur P du plan tangent en A à (S). Cette droite est en effet le diamètre conjugué, dans le cône Σ, du plan tangent en A, à (S).

2° Les coniques C admettent toutes un triangle autopolaire fixe $B_1B_2B_3$, formé par les points diagonaux du quadrangle donné; par suite, le lieu du point M reste constamment dans le plan $b_1b_2b_3$.

De plus d'après le théorème suivant, bien connu :

Le lieu des pôles d'une droite Δ, *par rapport à un faisceau de coniques* C *circonscrites à un quadrilatère, est une conique* (Δ).

Chasles *(loc. cit.)*

le lieu du point M sera l'intersection du cône de sommet A et de base (Δ), située dans le plan P, et du plan $b_1b_2b_3$. Ce lieu est donc une conique.

3° Les coniques C admettent évidemment un triangle autopolaire commun $B_1B_2B_3$ défini comme précédemment. Le lieu du point M sera encore dans le plan $b_1b_2b_3$.

D'ailleurs, on sait que :

Le lieu des pôles d'une droite Δ, par rapport à un faisceau de coniques, inscrites à un quadrilatère, est une droite δ.

Le lieu du point M se trouvera dans le plan déterminé par A et la droite δ. Ce lieu est, par suite, l'intersection des deux plans que nous venons de considérer.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(7 juin)

Composition de Mathématiques.

On donne, dans un plan, une hyperbole équilatère H, *dont l'équation, par rapport à ses axes, pris pour axes des coordonnées, est :*

(1) $$x^2 - y^2 = a^2.$$

D'un point M *du plan, ayant pour coordonnées* $x = p$, $y = q$, *on mène des normales à cette courbe.*

On demande :

1° De faire passer par les pieds de ces normales une nouvelle hyperbole équilatère, dont les normales en ces points soient concourantes, et de déterminer leur point de concours ;

2° En désignant par K *une hyperbole équilatère satisfaisant à cette condition, dans quelle région du plan doit ê re placé le point* M *pour qu'il y ait une hyperbole* K *correspondant à ce point ;*

3° Quelle ligne doit décrire le point M *pour que l'hyperbole* K *soit égale à l'hyperbole* H.

N.-B. — On conservera les notations indiquées.

1° et 2°. L'hyperbole d'Apollonius, qui correspond au point p, q, a pour équation

(2) $$2xy - py - qx = 0.$$

Par suite, l'équation générale des hyperboles équilatères, passant par les pieds des normales issues de M, est

(K) $$\lambda(x^2 - y^2 - a^2) + 2xy - py - qx = 0.$$

Soit A (x, y) le pied d'une des normales que nous considérons. En écrivant que la normale à l'hyperbole (K), en ce point, passe par un point M' (α, β), on a

$$\frac{\alpha - x}{2\lambda x + 2y - q} = \frac{\beta - y}{2x - 2\lambda y - p},$$

ou

(3) $2(y^2 - x^2) + 4\lambda xy + x(2\alpha + p - 2\lambda\beta) - y(2\lambda\alpha + 2\beta + q) - p\alpha + q\beta = 0.$

Les coordonnées x, y du point, vérifient (1), (2), (3) et, par suite, l'équation

(4) $-2a^2 + 2\lambda(py + qx) + x(2\alpha + p - 2\lambda\beta) - y(2\lambda\alpha + 2\beta + q) - p\alpha + q\beta = 0,$

obtenue par la combinaison de celles-ci. Mais cette observation s'applique aux coordonnées des pieds des trois autres normales issues de M. De cette remarque, il résulte que l'égalité précédente représentant, si l'on considère x, y comme des coordonnées courantes, une droite passant par quatre points, non en ligne droite, doit être une identité. On a donc

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha - 2\lambda\beta + p + 2\lambda q &= 0,\\ 2\lambda\alpha + 2\beta + q - 2\lambda p &= 0,\\ p\alpha - q\beta + 2a^2 &= 0. \end{aligned}\right\} (\theta)$$

Si nous éliminons α, β nous avons, pour déterminer λ, l'équation

$$\begin{vmatrix} 2 & -2\lambda & p + 2\lambda q \\ 2\lambda & 2 & q - 2\lambda p \\ p & -q & 2a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou $$2\lambda^2(q^2 - p^2 - 2a^2) + 6pq\lambda + p^2 - q^2 - 4a^2 = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles, si l'on suppose

$$9p^2q^2 - 2(q^2 - p^2 - 2a^2)(p^2 - q^2 - 4a^2) > 0.$$

On voit facilement que cette inégalité revient à celle-ci

(A) $$(2p^2 + q^2 + 4a^2)(p^2 + 2q^2 - 4a^2) > 0.$$

Les hyperboles (K) seront donc réelles, toutes les fois que le point M sera pris à l'extérieur de l'ellipse qui correspond à l'équation

$$x^2 + 2y^2 - 4a^2 = 0.$$

Quant aux coordonnées α, β du point de concours M′ des normales, elles vérifient, d'après les équations (θ), les relations

(5) $$p\alpha - q\beta + 2a^2 = 0,$$

(6) $$2\alpha^2 + 2\beta^2 - p\alpha - q\beta - p^2 - q^2 = 0.$$

Il y a deux points tels que M′, correspondant au point M. Ces points sont à l'intersection de la droite (5) et du cercle (6), quand on considère, dans ces équations, α, β comme des coordonnées courantes.

En exprimant que l'intersection de cette droite et de ce cercle est réelle, on retrouve (A).

3° L'équation de (K) étant

(K) $$\lambda x^2 - \lambda y^2 + 2xy - qx - py - \lambda a^2 = 0,$$

on a, avec les notations habituelles,

$$\Delta = \lambda^3 a^2 + \frac{pq}{2} - \lambda\frac{p^2}{4} + \lambda\frac{q^2}{4} + \lambda a^2$$
$$\delta = -(\lambda^2 + 1).$$

On sait d'ailleurs que l'équation aux carrés des demi-axes est (C. M. S., t. II, p. 280)

$$\delta^3 z^2 + \Delta\delta(A + A' - 2B'' \cos\theta)z + \Delta^2 \sin^2\theta = 0.$$

En appliquant cette relation à l'hyperbole (K) on a

(7) $$a^4(\lambda^2 + 1)^3 = \left\{ a^2\lambda(\lambda^2 + 1) + \lambda\frac{q^2 - p^2}{4} + \frac{pq}{2} \right\}^2.$$

Il s'agit maintenant d'éliminer λ entre cette équation et la relation

(8) $$2\lambda^2(q^2 - p^2 - 2a^2) + 6pq\lambda + p^2 - q^2 - 4a^2 = 0.$$

A cet effet, et pour faciliter cette élimination, nous poserons

$$\lambda = \operatorname{tg}\varphi.$$

L'égalité (7) donne alors

$$\frac{a^2}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2 \sin\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{q^2 - p^2}{4} + \frac{pq}{2} \ (^*)$$

ou

(9) $(q^2 - p^2)\sin\varphi\,(1 + \sin\varphi) + 2pq\cos\varphi = 4a^2$ (**).

D'ailleurs, (8) donne

(10) $(q^2 - p^2)(2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + 6pq\sin\varphi\cos\varphi = 4a^2.$

En observant que (9) et (10) peuvent être résolues par rapport aux quantités $q^2 - p^2$, pq, on a

(11) $(p^2 - q^2)(1 + \sin\varphi) = 4a^2(1 - 2\sin\varphi)$

$$2pq(1 + \sin\varphi) = 4a^2\,\frac{(2\sin\varphi + 1)(1 - \sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Elevant ces égalités au carré et ajoutant, on trouve

$$(p^2 + q^2)^2(1 + \sin\varphi)^2 = 16a^4\left\{(1 - 2\sin\varphi)^2 + \frac{(1 + 2\sin\varphi)^2(1 - \sin\varphi)}{1 + \sin\varphi}\right\}$$

ou

(12) $(p^2 + q^2)^2(1 + \sin\varphi)^3 = 32a^4.$

Entre (11) et (12), nous pouvons éliminer $\sin\varphi$. Cette élimination étant faite, en remplaçant, dans le résultat, p, q, par des coordonnées courantes, on obtient enfin l'équation du lieu cherché (***)

(R) $54a^2(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2 + 8a^2)^3.$

Pour discuter la courbe qui correspond à cette équation, on peut opérer de la façon suivante.

Posons $x^2 - y^2 + 8a^2 = 6t^2.$

Nous aurons $x^2 + y^2 = \dfrac{2t^3}{a};$

et, par suite, $x^2 = \dfrac{t^3 + 3at^2 - 4a^3}{a}$

ou, encore

(13) $ax^2 = (t + 2a)^2(t - a).$

(*) Le premier membre comporte, il est vrai, le signe $\pm$; mais en changeant φ en $\pi + \varphi$, on passe, du premier cas au second; il suffit donc de considérer l'un d'entre eux.

(**) Nous avons supprimé la solution $\sin\varphi = 1$. Pour cette valeur particulière, on a $\lambda = \infty$; l'hyperbole considérée K, coïncide avec l'hyperbole proposée. C'est une *solution singulière* de la question posée; le lieu du point M, dans cette hypothèse, est, d'après (8), l'hyperbole correspondant à l'équation

$$x^2 - y^2 + 2a^2 = 0.$$

(***) L'élimination que nous venons d'effectuer porte, comme on l'a vu, sur deux équations dans lesquelles le paramètre λ, qu'on doit éliminer entre au quatrième degré dans l'une, au second degré dans l'autre; ce calcul est ordinairement pénible. L'élimination de λ peut se faire par des procédés différents et probablement plus rapides que celui qu'on vient de lire. Pourtant, la méthode générale conduit, si nous ne nous trompons, à une courbe du douzième degré dont l'équation est le carré parfait de celle à laquelle nous aboutissons ici. Quant aux artifices particuliers qui peuvent simplifier cette élimination, on ne peut que les recommander dans des calculs aussi laborieux; mais il faut, quand on les emploie, ne pas perdre de vue qu'ils peuvent introduire des facteurs étrangers.

De même

(14) $$ay^2 = (t - 2a)^2(t + a).$$

En faisant varier t de a à $+\infty$ ($a > 0$) on construit la courbe, point par point; la forme générale de la courbe apparaît alors avec netteté. Elle est constituée par l'ensemble de deux branches paraboliques dont les sommets sont situés sur oy, à une distance de l'origine égale à $a\sqrt{2}$; la concavité des branches étant tournée vers les bissectrices des axes. La courbe présente deux points doubles réels, situés sur ox, à une distance égale à $\pm 4a$; et deux points doubles isolés, sur l'axe oy. Si l'on observe que l'équation cartésienne (R), rendue homogène, rentre dans la forme

$$U^3 = P^2Q^2R^2.$$

on voit que cette ligne présente *six points de rebroussement*; deux, sur la droite de l'infini; les quatre autres, deux à deux situés sur les droites isotropes passant par l'origine. En résumé, (R) est une sextique présentant six rebroussements et quatre points doubles. Sa classe est donc égale à :

$$6 \times 5 - 3 \times 6 - 2 \times 4 = 4.$$

Cette sextique de quatrième classe (*) a donc son maximum de points doubles; c'est une sextique unicursale.

On peut d'ailleurs le vérifier de la manière suivante.

Posons $$t - a = au^2, \qquad t + a = av^2.$$

Nous en déduisons $$\frac{2}{v - u} = v + u = \theta;$$

et, par conséquent,

$$v = \frac{1}{\theta} + \frac{\theta}{2}, \qquad u = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\theta}, \qquad t = a\frac{\theta^4 + 4}{4\theta^2}.$$

Les formules (13), (14) se transforment et donnent

$$x = (t + 2a)u, \qquad y = (t - 2a)v;$$

ou

$$x = a\,\frac{(\theta^4 + 8\theta^2 + 4)(\theta^2 - 2)}{8\theta^3},$$

$$y = a\,\frac{(\theta^4 - 8\theta^2 + 4)(\theta^2 + 2)}{8\theta^3}.$$

On peut discuter la forme du lieu, soit en utilisant les formules précédentes, soit, ce qui est au moins aussi simple, en faisant usage des formules (13), (14) qui se prêtent particulièrement bien à cette discussion.

(*) Ce fait que la courbe en question est de quatrième classe résulte encore de l'observation suivante.

Son équation étant mise sous la forme

$$x^2 - y^2 + 8a^2 = 3.2^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{2}{3}}.(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}};$$

si l'on pose $$x + yi \equiv U, \qquad x - yi \equiv V,$$

on a $$(U^{\frac{2}{3}})^3 + (V^{\frac{2}{3}})^3 + (4^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}})^3 - 3.4^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}U^{\frac{2}{3}}V^{\frac{2}{3}} = 0.$$

L'identité connue

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC \equiv (A + B + C)(A^2 + \ldots),$$

prouve que l'équation considérée est, sous une forme irrationnelle et imaginaire,

$$(x + yi)^{\frac{2}{3}} + (x - yi)^{\frac{2}{3}} + (4a)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

On reconnaît ainsi que la sextique en question est la développée d'une ellipse imaginaire; elle est donc de la classe 4.

Remarque. — La sextique rencontrée dans cette question est connue. On trouve dans Salmon, *Traité des courbes planes* (édition O. Chemin-Halphen, p. 101) l'équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-4\right)^3+27\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2=0,$$

qui représente l'*enveloppe des cordes de courbure qui correspondent aux différents points de l'ellipse représentée par l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

En faisant $a^2=-b^2$,

on a $(x^2-y^2+4b^2)^3=27b^2(x^2+y^2)^2$,

puis, en changeant b en $b\sqrt{2}$, on retrouve (R).

On peut aussi la considérer comme une première podaire négative de l'hyperbole représentée par l'équation

$$x^2-y^2+2a^2=0,$$

le pôle étant au centre de l'hyperbole.

Cette podaire négative, dans le cas de l'ellipse, a été particulièrement étudiée par Tortolini; elle est aussi connue sous le nom de *Courbe de Talbot* (voyez *Nouvelles Annales*, 1871, p. 466).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Composition de trigonométrie.

Dans un triangle ABC, on donne :

$$b=5828^{m},755,$$
$$c=4754^{m},824,$$
$$A=75^{\circ}\,35'\,45''.$$

Calculer le côté a, les angles B et C, et la surface du triangle.

Composition de géométrie descriptive.

Un cube de 15^{cm} de côté a l'une de ses trois directions d'arêtes verticale et une autre perpendiculaire au plan vertical.

Dans la face postérieure, considérons l'arête de gauche, l'arête inférieure et le sommet situé à l'intersection des deux autres arêtes.

La droite passant par ce sommet et par le sommet opposé du cube, engendrerait, si elle tournait successivement autour des deux arêtes considérées, deux hyperboloïdes qu'on suppose remplis.

Représenter, par ses projections, le corps formé par la partie commune aux deux solides ainsi obtenus, en le limitant en haut et en bas par les plans des deux faces horizontales du cube, et en arrière par celui de la face postérieure.

On placera au centre du cadre de l'épure la projection horizontale du point de rencontre des axes des deux hyperboloïdes, et, à un centimètre au-dessus, sur une parallèle aux petits côtés, la projection verticale du même point.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

On n'indiquera aucune asymptote.

ÉCOLE NORMALE

(16 juin 1890.)

I. — Entre les coordonnées x, y d'un point A et les coordonnées u, v d'un point B, on établit les relations

$$x = \frac{u^3 + \lambda uv^2}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{v^3 + \lambda vu^2}{u^2 + v^2},$$

où λ est un nombre positif donné.

Après avoir déduit, de ces relations, l'équation qui relie les coefficients angulaires α, β des droites qui joignent l'origine aux points A, B, on montrera que, en général, à chaque point A correspondent trois positions du point B : ces points B_1, B_2, B_3 peuvent-ils être réels et distincts? Où le point A doit-il se trouver pour qu'il en soit ainsi? Sur quel lieu doit-il être situé pour que deux de ces points (B_2 et B_3, par exemple) soient confondus? Si le point A décrit ce lieu, quels sont les lieux décrits par les points confondus B_2, B_3 et par le point B_1?

II. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on prend, sur l'axe des x, un point fixe A, sur l'axe des y, un point fixe B, et l'on mène, par le point O, une parallèle à la droite AB. On considère un système de trois cercles assujettis à avoir même axe radical et à être tangents : le premier, en A, à l'axe des x; le second, en B, à l'axe des y, le troisième en O à la parallèle à AB.

Démontrer que l'axe radical des trois cercles passe par un point fixe.

Trouver le lieu des points communs à ces trois cercles : on indiquera quelle est, en général, la forme de cette courbe, et l'on examinera en particulier le cas où l'angle en A du triangle OAB est égal à $\frac{\pi}{6}$.

EXERCICE ÉCRIT

33. — Lieu des foyers des coniques circonscrites à un losange.

Note sur l'exercice 32.

En proposant cette question, dont j'avais retrouvé l'énoncé dans des notes anciennes, j'avais oublié qu'il avait été proposé déjà (*Journal*, 1887; p. 275). Une solution, à laquelle nous renvoyons le lecteur, a été donnée (1888, p. 15). G. L.

BIBLIOGRAPHIE

COMPOSITIONS D'ANALYSE, MÉCANIQUE ET ASTRONOMIE, données depuis 1869, à la Sorbonne, pour la Licence ès sciences mathématiques; suivies d'exercices sur les variables imaginaires, par E. Villié, ancien ingénieur des Mines, docteur ès sciences, doyen de la Faculté libre des sciences de Lille *énoncés et solutions)*. — 2 vol. in-8°, avec fig. dans le texte, se vendant séparément :

Ire Partie; Compositions données depuis 1869, In-8°; 1885. **9 fr.**
IIe Partie; Compositions données depuis 1885, In-8°; 1890. **8 fr. 50 c.**

(Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.)

Nous appelons l'attention de nos lecteurs sur cet ouvrage très intéressant. Bien qu'il s'adresse plus particulièrement aux candidats à la Licence ès sciences mathématiques, il sera consulté avec profit par toutes les personnes compétentes. Dans la première partie sont résolus tous les problèmes d'Analyse et de Mécanique donnés en composition à la Sorbonne, depuis 1869, tant aux élèves de l'Ecole Normale qu'aux élèves libres qui se sont présentés à la Licence. L'auteur y a joint quelques questions proposées dans les autres Facultés et un certain nombre d'exercices sur les intégrales imaginaires et les fonctions doublement périodiques.

A la fin de cet ouvrage, on trouvera les énoncés des questions d'Astronomie proposées à la Sorbonne pendant la période 1869-1884. Les solutions de ces exercices sont exposées à la fin du second volume.

Dans la seconde partie, les chapitres qui ont été plus particulièrement développés sont ceux qui traitent des variables imaginaires en Analyse, de la Cinématique et de la Dynamique des systèmes en Mécanique. On y remarquera encore les solutions de nombreuses questions d'Analyse, à l'aide des coordonnées curvilignes introduites dans la Science par Gauss et dont, jusqu'à présent, on n'avait fait qu'un usage restreint dans les applications.

QUESTION 197 (*)

Solution par M. A. LÉVY, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Nancy.

Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes est égale à K.

Distinguer, s'il y a lieu, les arcs qui correspondent à des centres d'ellipse. (Amigues.)

(*) Proposée aussi, par inadvertance, sous le n° 227.

Soit OAB le triangle donné. Prenons OA, OB pour axes de coordonnées $OA = 2\alpha$, $OB = 2\beta$; et soit θ l'angle AOB. L'équation générale des coniques circonscrites au triangle est

$$Ax(x - 2\alpha) + Cy(y - 2\beta) + 2xy = 0.$$

La somme des carrés des longueurs algébriques des demi-axes d'une conique a pour expression $\frac{-\Delta J}{\delta^2}$; Δ, étant le discriminant de l'équation; δ, le discriminant des termes du second degré; et J représentant $A + A' - 2B'' \cos\theta$. On a, d'après l'hypothèse,

$$\frac{-\Delta J}{\delta^2} = K,$$

c'est à dire

$$(1) \quad AC(2\alpha\beta - C\beta^2 - A\alpha^2)(A + C - 2\cos\theta) + (AC - 1)^2K = 0.$$

Les coordonnées du centre sont données par

$$(2) \quad A(x - \alpha) + y = 0 \qquad (3) \quad C(y - \beta) + x = 0.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant A, C entre (1), (2), (3).

On a $$A = \frac{-y}{x - \alpha}; \qquad C = \frac{-x}{y - \beta}.$$

$$\frac{xy}{(x-\alpha)(y-\beta)} + \left(\frac{x}{y-\beta} + \frac{y}{x-\alpha} + 2\cos\theta\right)\left(2\alpha\beta + \frac{\beta^2 x}{y-\beta} + \frac{\alpha^2 y}{x-\alpha}\right)$$
$$= K^2\left(\frac{xy}{(x-\alpha)(y-\beta)} - 1\right)^2,$$

ou

$$xy[x(x-\alpha) + y(y-\beta) + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta]$$
$$\times [(\beta x + \alpha y)^2 - 3\alpha\beta(\beta x + \alpha y) + 2\alpha^2\beta^2]$$
$$= K^2(x-\alpha)(y-\beta)(\beta x + \alpha y - \alpha\beta)^2.$$

Le dernier facteur du premier membre est divisible par $\beta x + \alpha y - \alpha\beta$. L'équation du lieu se réduit à

$$(4) \quad xy[x(x-\alpha) + y(y-\beta) + x(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta][\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta)$$
$$= K^2(x-\alpha)(y-\beta)(\beta x + \alpha y - \alpha\beta).$$

Le lieu est donc du cinquième degré. Il passe par les points circulaires à l'infini. Les axes de coordonnées, et, par analogie la droite AB, sont les asymptotes de la courbe. Il est d'ailleurs facile de voir que chacune de ces droites rencontre la courbe en trois points à l'infini; cette courbe a donc trois points d'inflexion, à l'infini, sur les côtés du triangle.

Les milieux des côtés du triangle sont les points doubles du lieu. Pour avoir les tangentes en ces points, transportons l'origine, par exemple au point $x = \alpha$, $y = \beta$, l'équation de la courbe devient

$$(x + \alpha)(y + \beta)[x(x + \alpha) + y(y + \beta) + 2xy\cos\theta](\beta x + \alpha y) - K^2xy(\beta x + \alpha y + \alpha\beta) = 0,$$

l'équation du faisceau des tangentes est

$$(\alpha x + \beta y)(\beta x + \alpha y) - K^2xy = 0,$$

c'est-à-dire, $\alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - K^2)xy = 0.$

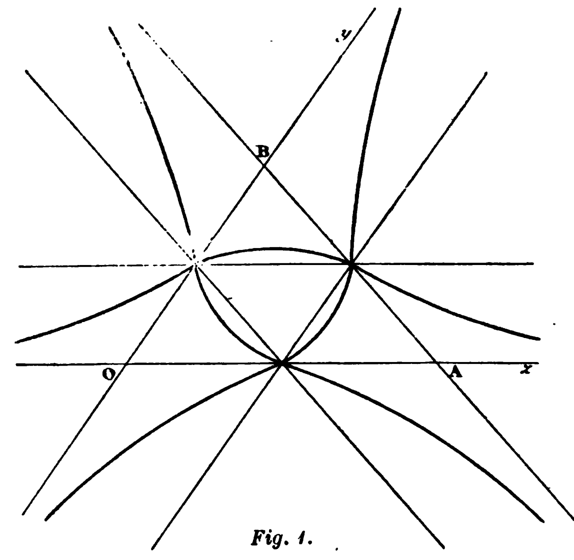


Fig. 1.

Le discriminant du premier membre de cette équation est

$$(\alpha^2 + \beta^2 - K^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 - 2K^2(\alpha^2 + \beta^2) + K^2.$$

Pour $K < 0$ (hyperboles), les tangentes sont réelles.

Pour $K > 0$ (ellipses ou hyperboles), les tangentes sont imaginaires si

$$(\alpha - \beta)^2 < K < (\alpha + \beta)^2$$
$$= [(\alpha + \beta)^2 - K][(\alpha - \beta)^2 - K].$$

La figure (1) montre la forme générale de la courbe dans l'hypothèse $K < 0$.

Pour achever de construire la courbe, nous allons séparer les régions du plan qui peuvent contenir des points du plan,

de celles qui n'en contiennent pas. Construisons les courbes représentées par les divers facteurs de (4) égalés à zéro, les facteurs du premier membre nous donneront les trois côtés du triangle et le cercle des neuf points de ce triangle. Les facteurs du second membre nous donnent les parallèles aux côtés du triangle, menées par les milieux. Cela posé, considérons un point à l'intérieur du triangle formé par ces dernières droites : les coordonnées de ce point rendront $x - \alpha$, $y - \beta$ négatifs, $\alpha y + \beta x - \alpha\beta$ positifs, c'est-à-dire le second membre positif, ils rendront xy positifs, les deux autres facteurs du premier membre négatifs, c'est-à-dire le premier membre positif. Il peut y avoir des points du lieu à l'intérieur

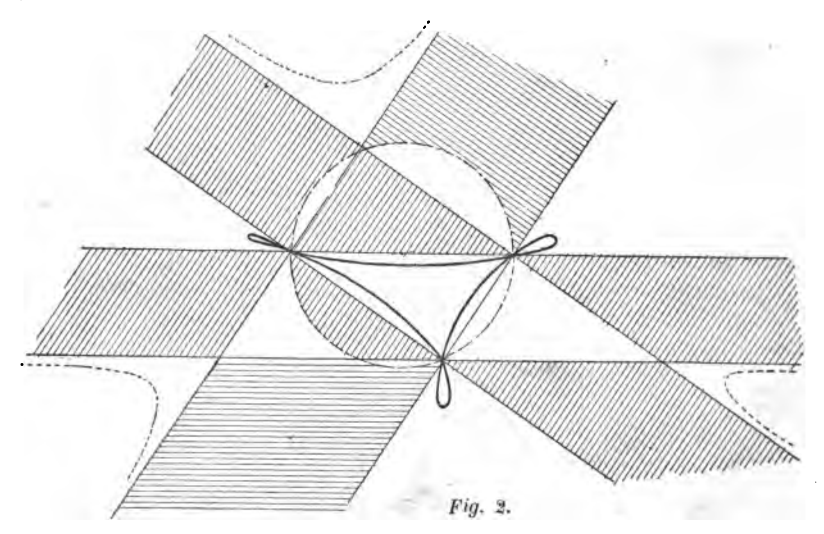


Fig. 2.

du triangle. Les régions hachées ne contiendront certainement pas de points du lieu, les autres pourront en contenir.

Ceci nous montre que si K^2 est plus petit que $(\alpha - \beta)^2$ ou plus grand que $(\alpha + \beta)^2$, la courbe a la forme de la figure (2). Si $K^2 = (\alpha - \beta)^2$, on a la figure (3). Enfin si l'on suppose $(\alpha - \beta)^2 < K^2 < (\alpha + \beta)^2$, le lieu affecte la forme indiquée sur la figure (4).

Séparons les arcs de la courbe correspondant aux centres d'ellipse, de ceux qui correspondent aux centres d'hyperboles.

L'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère est

$$Ax^2 + Cy^2 + 2xy - 2A\alpha x - 2C\beta y = 0,$$

le genre de la conique dépend de $AC - 1$; or, d'après la nature de la question :

$$A = -\frac{y}{x - \alpha}, \quad C = -\frac{x}{y - \beta}, \quad AC - 1 = \frac{xy}{(x - \alpha)(y - \beta)} - 1.$$

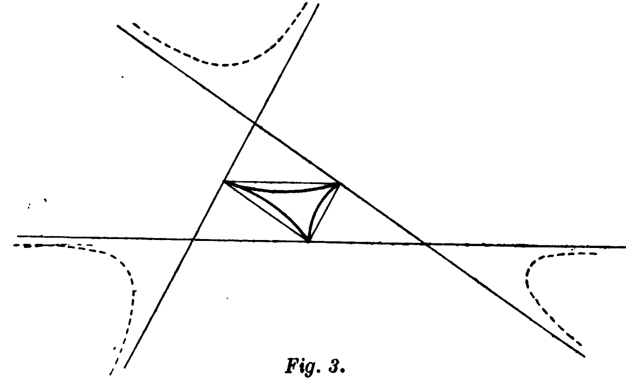


Fig. 3.

La courbe sera une ellipse ou une hyperbole suivant que $(x - \alpha)(y - \beta)(\alpha y + \beta x - \alpha\beta)$ sera positif ou négatif. Les arcs de

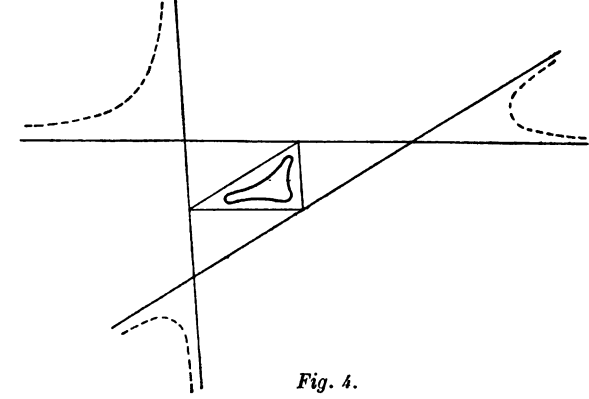


Fig. 4.

la courbe, situés dans les régions pour lesquelles cette fonction est positive, correspondent aux centres d'ellipse, ce sont les arcs situés à l'intérieur du triangle formé par les parallèles

aux côtés du triangle donné et menées par les milieux de ses côtés; ou dans les angles opposés par les sommets aux angles du triangle. Les points de la courbe situés dans les autres régions correspondent aux arcs d'hyperbole.

Dans les figures (2), (3), (4) nous avons représenté en trait plein les arcs correspondant aux arcs d'ellipse, en pointillé, ceux qui correspondent aux arcs d'hyperbole.

Il y a lieu d'observer pourtant que les formes indiquées comportent d'autres variétés, certains points doubles pouvant être isolés, les autres ne l'étant pas.

Nota. — Solutions analogues par MM. Roux, élève au lycée de Grenoble; Jules Lhébrard, élève au lycée de Montpellier; Leinckugel, élève au lycée Charlemagne; Louis Cazaly.

QUESTIONS PROPOSÉES

291. — Si l'on désigne : par U, la fonction du second degré à trois variables

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D;$$

par H, le discriminant de cette fonction rendue homogène; par γ, γ', γ'' et Δ, les mineurs qui, dans H, correspondent respectivement à C, C', C'' et D; enfin, par W, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A\sqrt{H} & B''\sqrt{H} + \gamma'' - \Delta z & B'\sqrt{H} - \gamma' + \Delta y \\ B''\sqrt{H} - \gamma'' + \Delta z & A'\sqrt{H} & B\sqrt{H} + \gamma - \Delta x \\ B'\sqrt{H} + \gamma' - \Delta y & B\sqrt{H} - \gamma + \Delta x & A''\sqrt{H} \end{vmatrix};$$

on aura

$$W = \Delta^2\sqrt{H}\,U.$$

(*A. Tissot.*)

ERRATUM

Page 144, question 289, première colonne et troisième ligne du déterminant : au lieu de $\beta z + \alpha'' y$, lire $\beta z - \alpha'' y$.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 14292-6-90.

SUR LA POLAIRE RÉCIPROQUE DE L'ÉPICYCLOIDE

Par M. **Svéchnicoff**, Professeur au Gymnase de Troïtzk (Russie).

(*Suite et fin*, voir p. 146).

---

2. — Considérons maintenant quelques cas particuliers.

La polaire réciproque de la cordioïde est la courbe ayant pour équation

$$\rho = b \operatorname{séc} \frac{\omega}{3}. \tag{9}$$

L'aire de la boucle formée par la courbe est $3b^2\sqrt{3}$.

Transformons quelques propriétés de la cardioïde.

(1) *Les tangentes à la cardioïde, en des points situés sur la droite passant par le point de rebroussement, sont perpendiculaires.*

(1)′ *Les points de contact des tangentes menées à la courbe* (9), *d'un point situé sur l'asymptote, sont vus, du pôle, sous un angle droit.*

(2) *Les normales en ces points se coupent sur la circonférence ayant le pôle pour centre et passant par le point de rebroussement.*

(2)′ *Supposons que* OT, OT′ *soient les sous-tangentes en ces points. La droite* TT′ *enveloppe une circonférence tangente à l'asymptote et ayant le pôle pour centre.*

(3) *Si, autour du point de rebroussement, on fait pivoter un angle* MOM′ $= \alpha$, *dont les côtés rencontrent la cardioïde en* M *et en* M′, *les tangentes en ces points se coupent sous un angle constant*

$$\beta = \pm\left(\pi - \frac{3\alpha}{2}\right).$$

(3)′ *Si, autour du pôle, on fait pivoter un angle* MOM′$=\beta$, *dont les côtés rencontrent la courbe* (9) *en* M *et en* M′, *les tangentes en ces points coupent l'asymptote en des points* N *et* N′ *tels, que l'angle* NON′

$$\alpha = \frac{2}{3}(\pi \mp \beta).$$

Considérons la courbe représentée par

$$\rho = b \cos \frac{\omega}{3}. \tag{10}$$

Les courbes (9) et (10) sont inverses.

Transformons les propriétés (1)', (2)' de la courbe (9).

1. Les points de contact M et M' de deux circonférences, tangentes à la courbe (10) et menées par le pôle et par un point de K (*), sont vus, du pôle, sous un angle droit.

2. Les points d'intersection N, N' de ces circonférences et des perpendiculaires ON et ON', élevées aux rayons vecteurs OM, OM', sont situés sur la circonférence ONN', qui passe par le pôle et qui est tangente au cercle correspondant à l'équation $\beta = a$.

La polaire réciproque de l'hypocycloïde a pour équation, en coordonnées polaires :

$$(11) \qquad \rho = \frac{r^2}{(n-2)a \cos \dfrac{n\omega}{n-2}} = b \text{ séc } \frac{n\omega}{n-2}.$$

L'hypocycloïde à trois rebroussements a, pour polaire réciproque, la courbe dont l'équation est

$$(12) \qquad \rho = b \sec 3\omega,$$

ou

$$(b + 3x)y^2 = (x - b)x^2.$$

Les propriétés de cette courbe sont analogues aux propriétés de la cubique mixte. Il est facile de les énoncer, en transformant les propriétés de l'hypocycloïde.

QUESTIONS D'EXAMENS

1. — Une conique Γ est donnée par l'équation

$$(1) \quad f = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Byz + 2B'xz + A''z^2 = 0.$$

Trouver l'équation du faisceau des tangentes aux points M, N communs à Γ et à une droite Δ dont l'équation est

$$(1) \qquad P = ux + vy + wz = 0.$$

1. — Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées du pôle de Δ ; l'équation cherchée est

$$(3) \qquad 4ff_0 = (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0})^2,$$

Mais on a

(*) K désigne la circonférence inverse de l'asymptote de la courbe (9).

(4) $$\frac{f'_{x_0}}{u} = \frac{f'_{y_0}}{v} = \frac{f'_{z_0}}{w} = -2\rho,$$

et $$2f_0 \equiv x f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = -2\rho(ux_0 + vy_0 + wz_0).$$

L'équation (3) devient

(5) $$f(ux_0 + vy_0 + wz_0) + \rho(ux + vy + wz)^2 = 0$$

Les égalités (4), (5) linéaires, et homogènes en x_0, y_0, z_0, ρ, donnent, par élimination de ces paramètres :

(A) $$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & \dfrac{f}{P^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Tel est le résultat cherché.

2. — *Autrement.* L'équation des coniques doublement tangentes à Γ, aux points M, N est

$$f + \lambda(ux + vy + wz)^2 = 0.$$

Déterminons λ de façon que cette équation représente deux droites; *a priori* on prévoit que l'équation en λ aura deux racines infinies. Pour obtenir la racine non infinie, on observera que, dans l'égalité

$$\begin{vmatrix} A + \lambda u^2 & B'' + \lambda uv & B' + \lambda uw \\ B'' + \lambda uv & A' + \lambda v^2 & B + \lambda vw \\ B' + \lambda uw & B + \lambda vw & A'' + \lambda w^2 \end{vmatrix} = 0,$$

il faut déterminer le coefficient indépendant de λ et le terme en λ. On a

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} + \lambda u \begin{vmatrix} u & B'' & B' \\ v & A' & A'' \\ w & B & A \end{vmatrix} + \lambda v \begin{vmatrix} A & u & B' \\ B'' & v & B \\ B' & w & A'' \end{vmatrix} + \lambda w \begin{vmatrix} A & B'' & u \\ B'' & A' & v \\ B' & B & w \end{vmatrix} = 0$$

d'où $$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}}.$$

L'équation cherchée est donc

(A') $$\frac{f}{P^2}\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & A \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = v.$$

On observera que le résultat (A), trouvé par la première méthode est identique à celui que nous venons d'obtenir. On met cette identité en évidence en écrivant les éléments de la dernière colonne de (A) sous la forme

$$u + 0, \quad v + 0, \quad w + 0, \quad 0 + \frac{f}{P^2},$$

conformément à l'artifice connu qui permet de résoudre, par rapport à un certain élément, sous la forme d'un quotient de déterminants, un déterminant donné.

La valeur de λ n'est infinie que si le déterminant qui est au dénominateur est nul. Ce résultat est évident *a priori*, car, dans cette hypothèse, la droite considérée est tangente à la conique proposée.

2. — Discuter l'équation

(1) $$x \text{ arc tg } x + x + \text{arc tg } x - 1 = 0.$$

En appliquant une idée d'un ordre assez général (Voyez C. M. S.; *Alg.*, p. 526; *exercice* 9), on est conduit à considérer l'équation

(2) $$\text{arc tg } x + \frac{x-1}{x+1} = 0,$$

pour lui appliquer le théorème de Rolle. L'équation dérivée est

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{(x+1)^2} = 0;$$

elle n'a aucune racine réelle. La suite de Rolle, qui doit être considérée, dans la discussion de l'équation (2), est donc

$$-\infty \quad -1-\varepsilon \quad | \quad -1+\varepsilon \quad +\infty.$$

On trouve ainsi une racine réelle, unique, entre 0 et 1.

Dans cette discussion, arc tg x représente une fonction bien déterminée, définie, en supposant que *arc tg* x *représente le plus petit arc positif correspondant à une tangente de longueur* x.

Remarque. — On peut appliquer la méthode précédente dans plusieurs autres cas. Par exemple, aux équations

$$x\text{L}x + \text{L}x - x + 1 = 0,$$
$$x\text{L}x - \text{L}x + x + 1 = 0, \quad \text{etc.},$$

cas particuliers de l'équation

$$f(x).\text{L}x + \varphi(x) = 0,$$

dans laquelle $f(x)$, $\varphi(x)$ désignent des fonctions entières de x.

EXERCICE ÉCRIT

34. — D'un point M on mène les normales à la parabole P; soient A, B, C les pieds de ces normales, droites qui rencontrent l'axe de P aux points A', B', C'.

Soit O le sommet de P.

On suppose que OA' = B'C'.

1° Trouver le lieu de M.

2° Démontrer que M est le milieu de CC';

3° Trouver le lieu décrit par le pôle de AB;

4° Les normales considérées, abstraction faite des points A,B,C, coupent de nouveau la parabole en des points A'', B'', C''. Trouver le lieu décrit par le centre de gravité de A''B''C''.

Notes sur l'exercice 33.

Prenons l'équation générale des coniques sous la forme

(Γ) $$\theta(Ax + By + C)^2 + \theta'(Bx - Ay + C')^2 - k = 0.$$

Les foyers situés sur l'axe de (Γ) correspondant à l'équation

(1) $$Bx - Ay + C' = 0,$$
appartiennent aux cordes focales principales et celles-ci sont représentées par l'équation

(2) $$(Ax + By + C)^2 = k\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta'}\right). \ (*)$$

L'équation des coniques du réseau considéré s'obtient en faisant, dans (Γ), $C = C' = 0$ et en posant

(3) $$a^2(\theta A^2 + \theta' B^2) = b^2(\theta B^2 + \theta' A^2) = k,$$

a, b désignant les longueurs des demi-diagonales du losange. En appliquant les formules (1), (2) et en éliminant $\frac{k}{\theta}$, $\frac{k}{\theta'}$ entre les relations (1), (2), (3), on trouve

$$(b^2y^2 - a^2x^2)(a^2y^2 - b^2x^2) = a^2b^2(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \ (**).$$

Nota. — Nous avons reçu de M. Bolin, maître répétiteur au collège de Verdun, une solution de cet exercice.

QUESTION 112

Solution par M. H. Brocard.

On considère un triangle rectangle ABC, *inscrit à une parabole, et dont l'hypoténuse* AB *est une normale de la courbe; trouver le lieu décrit par le centre du cercle* I, *inscrit à ce triangle.* (G. L.)

L'extrémité B de la corde AB, normale, en $A(\alpha, \beta)$ à la para

---

(*) Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette formule. On y arrive très rapidement en partant de l'équation réduite
$$mX^2 + nY^2 = 1,$$
et en observant que les coordonnées des foyers de la conique correspondante sont données par les relations
$$Y = 0, \qquad X^2 = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

(**) La courbe correspondante se construit facilement.

Ce résultat semble en contradiction avec les théorèmes connus. Chasles (*Comptes rendus* tome LVIII) dit que *dans un système* (μ, ν) *le lieu des foyers est une courbe d'ordre* 3ν *qui à deux points multiples d'ordre* ν, *à l'infini, sur un cercle.* Or, ici, $\nu = 2$. On devrait donc trouver une sextique, passant doublement par les ombilics du plan; ou une sextique dégénérée jouissant de cette propriété. Ce qui n'a pas lieu, si nous ne nous trompons.

Salmon (*Sections coniques*, édition Résal-Vaucheret 1870, p. 301), traitant le cas général (celui des coniques circonscrites à un quadrilatère quelconque), trouve une courbe du sixième degré, se décomposant, comme l'ont observé MM. Sylvester et Burnside, en deux cubiques, dans le cas où le quadrilatère considéré est inscriptible à une circonférence.

Peut-être quelqu'un, parmi nos lecteurs, lèvera-t-il cette contradiction apparente dont nous n'apercevons pas la raison.

bole, a pour coordonnées

$$x = \frac{(p+\alpha)^2}{\alpha}, \quad y = -\frac{2p(p+\alpha)}{\beta}.$$

L'inclinaison de AC est égale et de signe contraire à celle de AB; et l'inclinaison de BC est égale et de signe contraire à celle de la tangente en A. L'inclinaison de CI est donc $\frac{\beta - p}{\beta + p}$.

La droite CI a pour équation

$$y + \frac{2p(p+\alpha)}{\beta} = \frac{\beta - p}{\beta + p}\left[x - \frac{(p+\alpha)^2}{\alpha}\right].$$

D'ailleurs, AI est perpendiculaire à l'axe de la parabole; donc le point I a pour abscisse α. On en conclut que l'équation du lieu (I) se déduit, de la précédente, par les substitutions $\alpha = x$, $\beta = \sqrt{2px}$.

QUESTIONS 195

Solution par M. L. Delbourg, maître répétiteur au Lycée d'Agen.

On considère des hyperboles équilatères H *qui ont pour centre un point fixe* O *et qui passent par un autre point fixe* A.

Trouver le lieu décrit par les sommets réels de H. *Ce lieu est une lemniscate de Bernoulli.*

On propose, après avoir reconnu ce fait par le calcul, de l'établir géométriquement en prenant pour base de cette démonstration géométrique la propriété suivante :

Le produit des distances d'un foyer F *d'une hyperbole équilatère à deux points* A, A' *de la courbe, diamétralement opposés, est égal au carré de* $\frac{AA'}{2}$.

On établira d'abord géométriquement cette relation. G. L.

Posons OA $= a$; prenons OA pour axe des x; une perpendiculaire à OA, au point O, pour axe des y.

L'équation des hyperboles H est

(1) $$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - a^2 = 0.$$

Soit S_1 (x, y) l'un des sommets réels de H; la tangente en S

est perpendiculaire sur OS; on a donc

$$(2) \qquad \frac{y}{x}\cdot\frac{\lambda + \lambda y}{\lambda x - y} = 1.$$

Entre (1) et (2) éliminons λ, nous obtenons l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

La courbe correspondante est une quartique à centre, passant doublement par les ombilics du plan, et possédant un nœud à tangentes rectangulaires; on sait (*C. M. S.* p. 539) qu'une courbe remplissant ces conditions est une lemniscate de Bernoulli.

Démonstration géométrique. Le lieu décrit par les sommets de H est homothétique au lieu des foyers; démontrons donc que ce dernier lieu est une lemniscate de Bernoulli.

Soient A, A′ les extrémités d'un diamètre de H; F, F′ ses foyers; on a

$$A'F - AF = 2OS,$$

d'où

$$(1) \qquad \overline{A'F}^2 + \overline{AF}^2 - 2AF.A'F = 4\overline{OS}^2.$$

D'autre part, le triangle AFA′ donne

$$(2) \qquad \overline{A'F}^2 + \overline{AF}^2 = 2\overline{OF}^2 + 2\overline{OA}^2.$$

Observons que $\overline{OF}^2 = 2\overline{OS}^2$; les égalités (1), (2) donnent

$$AF.A'F = \overline{OA}^2.$$

Cette égalité montre bien que F décrit une lemniscate de Bernoulli; le lieu de S est donc aussi une lemniscate de Bernoulli.

Solutions diverses par MM. Valabrègue, lycée de Montpellier; D.H et C.P, étudiants à Lille; A. Abelin, lycée d'Angoulême; J. Berthon lycée de Lyon; N. Roux, lycée de Grenoble; Delatour, lycée V. Hugo, à Besançon; A. Troille, lycée de Grenoble; J. Moulet, collège de Manosque.

QUESTION 204

Solution.

On considère un triangle ABC*; et, par les sommets* B *et* C, *on fait passer des coniques* Γ *qui coupent de nouveau les côtés* AB, AC *respectivement en* B′ *et* C′; *de telle sorte que les tangentes en*

ces points soient parallèles aux côtés AC, AB. *Trouver l'enveloppe des coniques* Γ. *Cette enveloppe est une quartique située, tout entière, à l'intérieur du triangle* ABC, *et présentant, aux sommets de ce triangle, trois points de rebroussement. On vérifiera que les tangentes en ces points sont les médianes du triangle et que le lieu demandé ne varie pas quand, au lieu des points* B *et* C, *on fait passer les coniques considérées par deux sommets quelconques du triangle* ABC. (G. L.)

Prenons ABC pour triangle de référence; l'équation de Γ, en coordonnées barycentriques, est

(1) $$\alpha^2 + 2\lambda\beta\gamma + 2\mu\gamma\alpha + 2\nu\alpha\beta = 0.$$

En faisant $\beta = 0$, on a

$$\alpha = 0, \qquad \alpha + 2\mu\gamma = 0.$$

Cette seconde équation représente BC'; une droite passant par C' a pour équation

$$\alpha + 2\mu\gamma + t\beta = 0;$$

et, si elle est parallèle à AB, on a $t = 1$. Nous devons donc écrire que

(2) $$\alpha + 2\mu\gamma + \beta = 0,$$

représente une droite tangente à Γ. Les équations (1), (2) donnent

$$\alpha^2 - \frac{\lambda\beta}{\mu}(\alpha + \beta) - \alpha(\alpha + \beta) + 2\nu\alpha\beta = 0.$$

Puisque (2) est tangente à Γ, au point C', le premier membre doit se réduire à un terme en β^2. On a donc

$$2\nu = 1 + \frac{\lambda}{\mu}.$$

En exprimant que la tangente à Γ, en B', est parallèle à AC, on trouve, de même,

(4) $$2\mu = 1 + \frac{\lambda}{\nu}.$$

Les égalités (3), (4) donnent

$$\nu = \mu, \qquad \lambda = \mu(2\mu - 1).$$

L'équation générale des coniques du réseau est donc

$$4\mu^2\beta\gamma + 2\mu(\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma) + \alpha^2 = 0.$$

Par suite, l'enveloppe est représentée par l'équation

(5) $$(\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma)^2 = 4\alpha^2\beta\gamma.$$

Cette équation, développée, est

(6) $\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$

On vérifie immédiatement d'après ce résultat, que :

1° L'équation étant symétrique par rapport aux lettres α, β, γ, le lieu cherché est une quartique qui reste la même quels que soient les deux sommets considérés dans l'énoncé. C'est une quartique remarquable du plan d'un triangle. Nous la désignerons par Θ.

2° D'après (5), la courbe est comprise dans l'intérieur de l'angle BAC, ou dans l'angle opposé par le sommet. En appliquant cette remarque aux trois sommets, on voit que Θ est située à l'intérieur du triangle ABC.

3° En faisant $\beta = \gamma$, on trouve

$$\beta^3(\beta - 4\alpha) = 0.$$

Il y a donc trois points confondus en A, communs à Θ et à la médiane, et un quatrième point A′, situé sur la droite qui correspond à l'équation $\beta = 4\alpha$. En ce point A′, la tangente est parallèle à BC.

Les sommets A, B, C sont trois points de rebroussement de Θ; cette courbe est donc une quartique unicursale.

4° L'équation (6) peut être mise sous la forme

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\frac{1}{\gamma}} = 0.$$

La quartique Θ, que nous rencontrons dans cet exercice, est donc la transformée, par points réciproques, de la conique inscrite à ABC, et circonscrite au triangle qui a pour sommets les milieux des côtés.

5° Si l'on élève des perpendiculaires au plan ABC, aux points A, B, C on forme une figure prismatique. En coupant celle-ci par un plan, de façon à obtenir, comme section, un triangle équilatéral, on voit que Θ n'est autre chose que la projection, sur un plan quelconque, de l'hypocycloïde à trois rebroussements, la courbe merveilleuse de M. Cremona.

De cette remarque, et des propriétés connues de l'hypocycloïde, on peut déduire toute une étude de la courbe Θ.

Nota. — Solutions diverses par MM. L. Delbourg, maître répétiteur au lycée d'Agen; J. Lhébrard, élève au lycée de Montpellier; Leinekugel, élève au lycée Charlemagne; Roux, élève au lycée de Grenoble.

QUESTION 205 (*)

Solution par M. L. Delbourg, maître répétiteur au Lycée d'Agen.

Soient Ox *et* Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires. On considère des paraboles* P *qui passent par l'origine, tangentiellement à* Ox, *et qui coupent* Oy *en un point fixe* A (OA = 4b). *Sur* OA, *on prend un point* B *tel que* OB = b; *et de ce point* B, *on mène les normales à* P. *Trouver le lieu décrit par le pied des normales ainsi obtenues, etc...* G. L.

L'équation de la parabole est

$$(1)\qquad (y - mx)^2 = 4by.$$

Celle de l'hyperbole aux pieds des normales issues de B : (o, b) est

$$\frac{-x}{m^2x - my} = \frac{b - y}{y - mx - 2b},$$

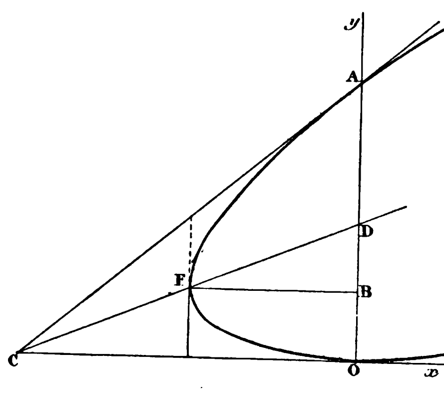
ou

$$(2)\qquad (y - mx)(x + my) = b[my + (2 - m^2)x].$$

Le faisceau des droites issues de l'origine et allant aux points d'intersection des coniques (1) (2) est représenté par l'équation

$$(3)\qquad (y - mx)(y + mx)[3my - (m^2 - 2)x] = o.$$

Au facteur $y - mx$ correspond la normale Oy; au facteur $y + mx$, correspond une normale dont le pied est situé constamment sur la parallèle à Ox, menée par B.



Ce résultat peut être établi géométriquement. Soient D le milieu de OA, et C le pôle de cette droite. La ligne CD est coupée en son milieu E par la parabole; et la tangente en ce point

(*) Marquée 204 par erreur. (Voyez l'énoncé complet *Journal* 1886, p. 216.)

est parallèle à OA. La droite BE, qui correspond à $y = b$ est donc perpendiculaire à la tangente au point E : c'est la normale en ce point. Cette droite fait donc partie du lieu.

Considérons maintenant le troisième facteur. Les coordonnées du point dont on cherche le lieu géométrique vérifient les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} (y - mx)^2 - 4by = 0, \\ 3my - (m^2 - 2)x = 0. \end{cases}$$

Au lieu d'éliminer m entre les équations (1), on peut les résoudre par rapport à x et y.

On a
$$\frac{y}{x} = \frac{m^2 - 2}{3m},$$

puis

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{b} = \dfrac{3m(m^2 - 2)}{(m^2 + 1)^2}, \\ \dfrac{y}{b} = \left(\dfrac{m^2 - 2}{m^2 + 1}\right)^2. \end{cases}$$

La discussion de ces formules montre la forme de la courbe. Elle se compose de deux ovales situés du côté des ordonnées positives, tangents à OX, au point O, et passant par les points A et B.

Ils correspondent aux deux équations

$$x^2 + y^2 - 2by = \pm\, y\sqrt{by},$$

obtenues par l'élimination de m entre les égalités (1), et sont l'un extérieur, l'autre intérieur au cercle décrit sur OD comme diamètre.

Nota. — Solutions par MM. Roux, élève au lycée de Grenoble ; Leinekugel, élève au lycée Charlemagne ; Henry Seauve, élève au lycée de Grenoble.

QUESTION 208

Solution, généralisation et développements par M. H. Plamenewsky, maître à l'École réale de Temir-Khan-Choura.

Démontrer que l'expression

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

tend vers $\frac{2}{3}$, *quand* n *croît indéfiniment.*

Considérons un cas plus général et prenons l'équation de la parabole, du degré m, rapportée aux axes OX, OY

$$x = y^m.$$

Divisons $x = a$ en n parties et menons, par chacun des points de la division, des perpendiculaires $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$. Leurs valeurs sont

$$y_1 = \sqrt[m]{\frac{a}{n}}\sqrt[m]{1}; \qquad y_2 = \sqrt[m]{\frac{a}{n}}\sqrt[m]{2}; \qquad y_3 = \sqrt[m]{\frac{a}{n}}\sqrt[m]{3}; \ldots$$

$$y_n = \sqrt[m]{\frac{a}{n}}\sqrt[m]{n}.$$

La somme $S_1 = \frac{a}{n}(y_1 + \ldots + y_n)$ est une aire qui, pour $n = \infty$, tend vers celle de la figure déterminée par l'ordonnée y_n, par l'axe OX et par l'arc de la parabole.

Nous avons

$$S_1 = \frac{a}{n}\sqrt[m]{\frac{a}{n}}\left\{\sqrt[m]{1} + \sqrt[m]{2} + \sqrt[m]{3} \ldots \sqrt[m]{n}\right\}.$$

Divisons maintenant $y_n = \sqrt[m]{a}$ en n parties égales; les perpendiculaires menées par les points de division coupent la parabole en des points dont les abscisses sont :

$$x_1 = \frac{a}{n^m}1^m; \qquad x_2 = \frac{a}{n^m}2^m; \qquad x_3 = \frac{a}{n^m}3^m \ldots x_n = \frac{a}{n^m}n^m.$$

L'aire comprise entre la courbe, l'axe OY et l'abscisse x_n est la limite de la somme

$$S_2 = \frac{\sqrt[m]{a}}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

pour n croissant indéfiniment.

Or, on a

$$S_2 = \frac{\sqrt[m]{a}}{n}\frac{a}{n^m}\left\{1^m + 2^m + 3^m \ldots + n^m\right\}$$

Mais la somme des puissances de degré m des n premiers nombres vérifie la formule connue

$$(n+1)[(n+1)^m - 1] = \frac{m+1}{1}s_m + \frac{(m+1)m}{1.2}s_{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}s_{m-2}\ldots$$

On en déduit que, si n croît indéfiniment, l'expression

$$\frac{S_m}{n^{m+1}} \text{ tend vers } \frac{1}{m+1};$$

par suite
$$S_2 = \frac{a\sqrt[m]{a}}{m+1}.$$

Soit S la limite de la somme $S_1 + S_2$; on a
$$S = x_n . y_n = a\sqrt[m]{a}.$$

Donc
$$a\sqrt[m]{a} = \frac{a\sqrt[m]{a}}{m+1} + \lim \frac{a\sqrt[m]{a}}{n\sqrt[m]{n}} \left\{ \sqrt[m]{1} + \sqrt[m]{2} + \sqrt[m]{3} \dots \sqrt[m]{n} \right\}$$

d'où
$$\lim \frac{\sqrt[m]{1} + \sqrt[m]{2} + \sqrt[m]{3} + \dots \sqrt[m]{n}}{n\sqrt[m]{n}} = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1} = \frac{1}{\frac{1}{m}+1}$$

C'est la formule générale que nous voulions établir.

En particulier, pour $m = 2$, nous avons
$$\lim \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}, \qquad (n = \infty).$$

Il est facile de démontrer, par une méthode analogue, que l'expression $\frac{\Sigma_1^n i^m}{n^{m+1}}$ tend vers $\frac{1}{m+1}$, pour n croissant indéfiniment, m désignant une fraction rationnelle quelconque.

Remarques et Développements. — A propos de cet exercice nous signalerons l'application de la précédente méthode à la recherche de plusieurs propositions.

I. — Si nous divisons, dans un cercle, un rayon $OA = r$ en n parties égales et si nous menons par les points de division les perpendiculaires $y_1, y_2 \dots y_n$, nous avons
$$\frac{\pi r^2}{4} = \lim \frac{r}{n}(y_1 + y_2 + \dots y_n) \qquad (n = \infty).$$

Mais
$$y_i = \sqrt{r^2 - \frac{r^2 i^2}{n^2}} = r\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}.$$

Par suite,
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}.$$

Développons
$$\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}};$$

nous avons

$$\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}=1-\frac{1}{2}\frac{i^2}{n^2}-\frac{1}{2.4}\frac{i^4}{n^4}-\frac{1.3}{2.4.6}\frac{i^6}{n^6}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{i^8}{n^8}\cdots$$

Ainsi

$$\frac{\pi}{4}=\sum\frac{1}{n}-\sum\frac{1}{2}\frac{i^2}{n^3}-\sum\frac{1}{2.4}\frac{i^4}{n^5}-\sum\frac{1.3}{2.4.6}\frac{i^6}{n^7}\cdots$$

Les sommations étant faites de $i = 1$, à $i = n$.

$$\text{Or}\quad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{1}{3};\quad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{i^4}{n^5}=\frac{1}{5}:\quad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{i^6}{n^7}=\frac{1}{7}\cdots$$

Donc

$$(A)\qquad \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.4.5}-\frac{1.3}{2.4.6.7}\cdots$$

2. — Si nous divisons $\frac{OA}{2}$ en n parties, en partant du centre de cercle, nous trouvons une nouvelle série

$$y_i=r\sqrt{1-\frac{i^2}{4n^2}};\ S=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{r^2}{2n}\sqrt{1-\frac{i^2}{4n^2}}=\frac{1}{12}\pi r^2+\frac{\sqrt{3}}{8},$$

$$\text{d'où}\qquad \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}=1-\frac{1}{2.3}\frac{1}{4}-\frac{1}{2.4.5}\frac{1}{4^2}-\frac{1.3}{2.4.6.7}\frac{1}{4^3}\cdots$$

3. — Cherchons, par cette même méthode, le moment d'inertie du cercle par rapport à un diamètre, sachant que le moment d'inertie du parallélogramme de base B et de hauteur H, dont un des côtés est parallèle à l'axe, est $I = \frac{bh^3}{12}$.

Divisons le diamètre, par rapport auquel nous cherchons le moment d'inertie, en $2n$ parties et, par les points de division, menons les perpendiculaires $2y_1$, $2y_2$, $2y_3$, ... $2y_n$ dans le premier demi-cercle et $2y_1'$, $2y_2'$, $2y_n'$ pour l'autre. Les aires comprises entre ces perpendiculaires peuvent être considérées comme semblables à celles des parallélogrammes correspondantes si n croît indéfiniment. Par suite, leurs moments d'inertie sont

$$I_i=\frac{8y_i^3r}{12.n}=\frac{2}{3}\frac{y_i^3r}{n}.$$

Le moment d'inertie complet sera

$$I = 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{2}{3}\frac{y_i^3 r}{n};$$

Mais

$$y_i = \sqrt{r^2 - \frac{r^2 i^2}{n^2}} = r\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}};\ y_i^3 = r^3\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}.$$

Donc

$$I = \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{r^4}{n}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}} - \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{r^4 i^2}{n^3}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}.$$

Or $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}} = \frac{\pi}{4},$$

d'où

$$\text{(B)} \qquad I = \frac{1}{3}\pi r^4 - \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{r^4 i^2}{n^3}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}} \ldots$$

Considérons maintenant la somme des moments d'inertie de ces mêmes parallélogrammes par rapport au diamètre perpendiculaire au premier. Le moment d'inertie est le produit de l'aire du parallélogramme par le carré de sa distance au diamètre; par suite,

$$I_i' = 2y_i \frac{r}{n}\frac{r^2 i^2}{n^2}$$

et le moment d'inertie du cercle entier est

$$I = 2\sum 2y_i \frac{r^3 i^2}{n^3} = 4\sum_{i=1}^{i=n} \frac{r^4 i^2}{n^3}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}},$$

d'où $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{r^4 i^2}{n^3}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}} = \frac{I}{4}.$$

En mettant cette expression dans l'égalité (B), nous avons

$$I = \frac{\pi r^4}{3} - \frac{I}{3},$$

d'où $$I = \frac{\pi r^4}{4}.$$

4. — De ce résultat, on peut déduire quelques conséquences. On a

$$\frac{I}{4} = \frac{\pi r^4}{4 \cdot 4} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{r^4 i^2}{n^3}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}};\ \frac{\pi}{16} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i^2}{n^2}\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}.$$

On a donc

$$\frac{\pi}{16}=\sum\frac{i^2}{n^3}-\sum\frac{1}{2}\frac{i^4}{n^5}-\sum\frac{1}{2.4}\frac{i^6}{n^7}-\sum\frac{1.3}{2.4.6}\frac{i^8}{n^9}-\sum\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{i^{10}}{n^{11}}\cdots$$

ou

$$\frac{\pi}{16}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2.5}-\frac{1}{2.4.7}-\frac{1.3}{2.4.6.9}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.11}\cdots, \text{ etc.}$$

5. — Cherchons encore la limite de la série :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}},$$

pour n croissant indéfiniment.

On a d'abord

$$\left(1-\frac{i^2}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{i^2}{n^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{i^4}{n^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{i^6}{n^6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{i^8}{n^8}\cdots.$$

Donc

$$\text{(D)}\ \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}}=1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}\cdots$$

Il faut déterminer cette série.

On sait que

$$\text{(C)}\ \frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1.3}{2.4.7}+\frac{1.3.5}{2.4.6.9}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.11}\cdots$$

Nous avons trouvé plus haut

$$\text{(C')}\ \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.4.5}-\frac{1.3}{2.4.6.7}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}\cdots$$

Prenons la somme des deux séries (C) et (C')

$$\frac{\pi}{2}=1+\left(\frac{2}{2.3}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{4}{2.4.5}-\frac{1}{2.4.5}\right)+\left(\frac{1.3.6}{2.4.6.7}-\frac{1.3}{2.4.6.7}\right)+\cdots$$

$$\text{(D)}\ \frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}\cdots$$

Conséquemment

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}} = \frac{\pi}{2}.$$

6. *Application au pendule simple.* — Considérons un pendule écarté de sa position d'équilibre d'un angle α. Nous allons d'abord chercher quelle vitesse possède le point matériel en divers points de l'arc du cercle qu'il décrit, si la longueur du pendule est l. Divisons l'arc $l\alpha$ en n parties égales; ces arcs pourront se confondre avec leurs cordes si l'on suppose l'angle α très petit.

La vitesse v_i du mobile, lorsqu'il passe au point de la division i, est la même que s'il était tombé verticalement d'une hauteur

$$h_i = \frac{\alpha^2 l^2}{2l} - \frac{\alpha^2 l^2 i^2}{2ln^2};$$

on a donc $\qquad v_i = \sqrt{2gh_i} = \alpha\sqrt{gl}\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}},$

si le mobile franchit la partie de l'arc i en un temps t_i, uniformément; pour ce chemin $\frac{\alpha l}{n}$, nous aurons

$$\frac{\alpha l}{n} = t_i\,\alpha\sqrt{gl}\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}},$$

d'où $\qquad t_i = \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{n\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}}.$

La durée T d'une oscillation s'obtiendra en prenant le double de la somme t_i, en supposant que i varie de 1 à n; puis, que n croît indéfiniment.

On a donc

$$T = 2\lim(t_1 + t_2 + t_3 \ldots + t_n) =$$

$$2\lim\sum_{i=1}^{i=n}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{n\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}} = 2\lim\sqrt{\frac{l}{g}}\sum\frac{1}{n\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}}.$$

Mais nous avons démontré que

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc
$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

NOTA. — L'exercice proposé a été résolu par MM. : Roux, élève au lycée de Grenoble; G. Leinekugel, élève au lycée Charlemagne; Lhébrard, élève au lycée de Montpellier.

QUESTION 211

Solution par M. H. BROCARD.

On considère un angle droit YOX *et, par un point* C, *donné sur* OY, *on mène une droite* Δ *parallèle à* OX.

Autour de O, *on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent* Δ *aux points* M *et* N *et l'on imagine les deux paraboles* U *et* V *qui ont pour sommets, respectivement, les points* M, N; *dont les axes sont* MO *et* NO; *et qui passent par* C.

Cela posé :

1° Trouver le lieu des points de rencontre des axes de U *avec les paraboles* V, *ou des axes de* V *avec les paraboles* U;

Ce lieu est un cercle.

2° Démontrer que le lieu des points P, Q, R, *communs aux paraboles* U *et* V, *est un cercle;*

3° Chercher le lieu des points de rencontre des directrices des paraboles U *et* V;

Ce lieu est une droite parallèle à OX.

4° Démontrer que les cinq points C, P, Q, R, O *appartiennent à une certaine hyperbole équilatère* (H), *ayant pour centre le milieu de* OC;

5° Trouver les lieux décrits par le centre de gravité et par l'orthocentre de PQR;

6° Les asymptotes de (H) *rencontrent les axes des paraboles* U *et* V *en des points dont le lieu géométrique est un système de deux cercles.* (G. L.)

Soient CMX, OCY les axes de coordonnées; CM $= a$, CO $= b$, CN $= \frac{b^2}{a}$.

La parabole passant par C,M et ayant pour axe une parallèle à OM, a pour équation

$$(bx - ay - ab)^2 = \lambda y - ab^2x + a^2b^2.$$

Pour que le point M soit le sommet, il faut que la tangente en M soit perpendiculaire à OM. On trouve, en définitive:

(U) $$(bx - ay - ab)^2 = b^2(a^2 - ax - by).$$

Pour avoir l'équation de la parabole V, il suffit de changer a en $-\frac{b^2}{a}$; on trouve ainsi

(V) $$(ax + by + b^2)^2 = b(b^3 + abx - a^2y).$$

1° Le lieu des intersections S,S' de OM, avec la parabole V, s'obtiendra en éliminant a entre l'équation (V) et l'équation

$$bx - ay - ab = 0.$$

On trouve $$x^2 + y^2 + 2by = 0.$$

Même résultat pour les points d'intersection T, T', de ON avec la parabole U. Le lieu cherché est donc le cercle ayant O pour centre et OC pour rayon.

2° Ajoutant les deux équations (U) et (V), on trouve $a^2 + b^2$ pour facteur commun, puis

(D) $$x^2 + y^2 + 3by = 0,$$

équation d'une circonférence passant par l'origine C et dont le centre est à une distance O'C $= -\frac{3b}{2}$.

3° Le paramètre des paraboles (U) a pour expression

$$p = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}};$$

et celui des paraboles V

$$p' = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Les directrices de ces paraboles sont données par les équations

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{b}{4} + \frac{a^2}{b},$$

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{b}{4} + \frac{b^3}{a^2},$$

obtenues en exprimant que les différences des distances

$$OD_1 - OM, \quad OD'_1 - ON$$

sont

$$\frac{p}{2} \text{ et } \frac{p'}{2}.$$

L'élimination de x entre ces deux équations donne

(A) $$y = \frac{5}{4} b.$$

On peut remarquer (propriété évidente) que, d'un certain point de la droite (A), on pourra mener, aux deux paraboles, deux tangentes communes rectangulaires.

4° Pour que la conique représentée par $(U) + \lambda(V) = 0$ soit une hyperbole équilatère, il suffit que les coefficients de x^2 et de y^2 soient de signes contraires. On reconnaît que $\lambda = -1$. L'équation de l'hyperbole équilatère est donc

$$(U) - (V) = 0.$$

Le centre de cette conique est défini par les équations

$$(U)'_x - (V)'_x = 0, \qquad (U)'_y - (V)'_y = 0,$$

ou

$$2(b^2 - a^2)x - 4aby = 2ab^2,$$
$$2(b^2 - a^2)y + 4abx = b(a^2 - b^2).$$

L'élimination de x donne

$$y = -\frac{b}{2}.$$

5° Les points C, P, Q, R se trouvent situés sur la parabole (U) et sur la circonférence (D).

L'élimination de x donne

$$(a^2 + b^2)y^3 + 4b(a^2 + b^2)y^2 + \ldots = 0.$$

On en conclut que la somme des distances des points P, Q, R, à l'axe des y, est constante et égale à $-4b$.

Donc, le centre de gravité G du triangle PQR, dont l'ordonnée est le tiers de la somme indiquée, se trouve situé sur une droite fixe, dont l'équation est

$$y = -\frac{4}{3} b.$$

Le centre C′ du cercle circonscrit aux triangles PQR, est un point fixe $\left(0, -\frac{3}{2} b\right)$ (§ 2). Donc, en vertu d'une propriété connue, l'orthocentre H, qui se trouve sur GC′, à une distance HC′ = 3GC′, doit décrire une droite parallèle à CX et passant

par le point F de CY situé à la distance $CF = -b$. L'orthocentre H se trouve donc sur la parallèle à CX menée par le point O.

6° Le coefficient d'inclinaison m, des asymptotes à l'hyperbole équilatère (H), est donné par l'équation :

$$(b - am)^2 - (a + bm)^2 = 0,$$

et les asymptotes sont représentées par les équations

$$(1) \qquad y = \frac{b-a}{a+b}x - \frac{b}{2},$$

$$(2) \qquad y = \frac{b+a}{a-b}x - \frac{b}{2}.$$

D'autre part, les axes des paraboles (U) et (V) ont pour équations :

$$(3) \qquad bx - ay = ab,$$

$$(4) \qquad by + ax = -b^2.$$

L'élimination de a, entre les équations (1) et (3), ou (2) et (4) donne :

$$(5) \qquad 2(x^2 + y^2) + 3by - bx + b^2 = 0.$$

L'élimination de a entre les équations (1) et (4), ou (2) et (3) donne :

$$(6) \qquad 2(x^2 + y^2) + 3by + bx + b^2 = 0.$$

Les cercles (5), (6) ont pour centres $y = -\frac{3b}{4}$, $x = \pm\frac{b}{4}$. Ils ne rencontrent pas l'axe des x, et ils passent par les points $y = -\frac{b}{2}$, $y = -b$ situés sur l'axe des y, c'est-à-dire par le point milieu de OC et par le point O.

NOTA. — Solutions diverses par MM. Etienne Pascot, lycée de Montpellier; Leinekugel, lycée Charlemagne.

QUESTION 212

Solution par M. J. Lhébrard, élève au Lycée de Montpellier.

Soit $A_1A_2A_3A_4$ *un quadrilatère normal inscrit à une ellipse* Γ; *c'est-à-dire, un quadrilatère tel que les normales en ces points soient concourantes. Les tangentes à* Γ, *en ces mêmes points, ren-*

contrent la tangente à l'une des extrémités A *du grand axe* AA' *en quatre points* $B_1B_2B_3B_4$; *démontrer que l'on a :*

$$AB_1.AB_2.AB_3.AB_4 = -b^4,$$

et

$$\Sigma.AB_1.AB_2 = 0. \qquad \text{(G. L.)}$$

L'équation de la tangente à l'ellipse au point A_i

$$(a\cos\varphi_i,\quad b\sin\varphi_i),$$

est :

$$\frac{x\cos\varphi_i}{a} + \frac{y\sin\varphi_i}{b} - 1 = 0.$$

L'ordonnée de son point de rencontre avec la tangente au point A est :

$$AB_i = \frac{b(1-\cos\varphi_i)}{\sin\varphi_i} = b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_i}{2}$$

On doit donc démontrer que l'on a :

$$(1)\qquad \mathrm{tg}\,\frac{\varphi_1}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_2}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_3}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_4}{2} = -1$$

et

$$(2)\qquad \Sigma\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_1}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_2}{2} = 0.$$

Pour cela, exprimons que la normale au point A_i passe en un point fixe $(\alpha_1\beta)$; nous avons :

$$c^2\sin\varphi_i\cos\varphi_i - a\alpha\sin\varphi_i + b\beta\cos\varphi_i = 0,$$

ou bien :

$$c^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_i}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi_i}{2}\right) - a\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_i}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi_i}{2}\right) + b\beta\left(1-\mathrm{tg}^4\,\frac{\varphi_i}{2}\right) = 0.$$

De cette équation on tire, immédiatement, les relations (1) et (2).

NOTA. — Autres solutions par MM. Georges Athenosy, école Sainte-Geneviève; Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix; L. Delbourg, à Agen; Abelin, Lycée d'Angoulême; Troille, lycée de Grenoble.

QUESTION 213

Solution par M. L. DELBOURG.

On considère deux paraboles P, P' *qui, ayant même sommet* O, *se coupent orthogonalement en ce point. Autour du point* O *on fait tourner deux droites rectangulaires. On obtient ainsi : sur* P, *deux*

points a et b, *sur* P′, *deux autres points* a′ *et* b′. *Si l'on prend trois des quatre points* a, b, a′, b′ *pour former un triangle, le quatrième est l'orthocentre de ce triangle* (*). (Beaurepaire.)

Ce théorème sera démontré si nous prouvons que ab et $a'b'$ sont perpendiculaires.

Prenons pour axes les tangentes au point O; les paraboles P, P′ ont, respectivement, pour équations:

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0 \\ x^2 - 2p'y = 0. \end{cases}$$

Un faisceau de droites rectangulaires, issues de l'origine, sera représenté par

$$(1) \qquad y^2 + 2\lambda xy - x^2 = 0.$$

Une conique quelconque passant par les points d'intersection de P et du faisceau (1) aura une équation de la forme

$$(y^2 + 2\lambda xy - x^2) - k(y^2 - 2px) = 0.$$

Si nous écrivons que cette conique est formée de deux droites dont l'une est l'axe des ordonnées, nous trouvons, pour l'équation de ab :

$$2\lambda y - x + 2p = 0.$$

En opérant de même avec P′, on trouverait pour l'équation de $a'b'$:

$$y + 2\lambda x - 2p' = 0.$$

Les deux droites ab, $a'b'$ sont rectangulaires et la propriété en question se trouve établie.

Nota. — Solutions diverses par MM. Lhébrard, lycée de Montpellier; Favery, lycée de Montpellier; Leinekugel, lycée Charlemagne; Troille, lycée de Grenoble.

(*) En termes plus courts, les quatre points forment *un groupe orthocentrique*. Si quatre points A, B, C, D, situés dans un plan, sont tels que un des points envisagés, A par exemple, est l'orthocentre du triangle BCD; cette propriété pour des raisons évidentes s'applique aux quatre points, successivement considérés. Pour rappeler ce fait on peut dire que les points A, B, C, D forment un *groupe orthocentrique*. *(G. L.)*

QUESTIONS PROPOSÉES

292. — Soit un triangle de référence ABC dans lequel un point M est défini par les tangentes de ses angles surlatéraux $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ (*J. S.* p. 95). On demande d'indiquer la situation de M par rapport à ABC. 1° Les signes des coordonnées barycentriques α, β, γ décident si AM, ... coupent intérieurement ABC. Prouver que, pour AM, il faut et il suffit que les deux différences $\mathfrak{Y}_0 - B$, $\mathfrak{Z}_0 - C$ soient de même signe; $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ étant les angles positifs qui admettraient les tangentes données. 2° Si l'on trouve ainsi que AM coupe intérieurement ABC et que M est extérieur, on peut recourir à $\mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Z}_0$ (*) pour décider entre les deux régions où M peut se trouver.
3° *Application.* — Si, l'on définit V_2 et W_2, premier et second centres isogones, par la condition que les tangentes des angles $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ égalent toutes *tang* 120°, pour V_2, ou toutes *tang* 60°, pour W_2; V_2 est extérieur à ABC, pour $A > 120°$, et situé dans l'angle opposé par le sommet A. Il répond alors aux angles $-60°$, $-60°$, 120°. W_2 est toujours extérieur à ABC, mais pas toujours extérieur au cercle ABC. Si A est le seul angle $> 60°$, ou le seul $< 60°$, W_2 est situé dans A. — Cas du triangle équilatéral. *(A. Poulain.)*

(*) Si, au contraire, on veut traiter 2° à l'aide de α, β, γ, il faut établir la proposition suivante (par une considération relative aux aires α, β, γ): *si β et γ sont de signes contraires à α et ramenés à être positifs, la condition nécessaire et suffisante pour que* M *soit situé dans l'angle opposé par le sommet à* A *est que* $\alpha + \beta + \gamma < 0$. Mais on aboutit ainsi à des calculs très compliqués dans le problème actuel.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16316-7-90.

SUR LA MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS

Par M. A. Tissot.

Voici une démonstration, bien simple, du théorème connu, relatif à la multiplication de deux déterminants de même ordre.

Soient les déterminants

$$U = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}.$$

Considérons les équations linéaires et homogènes :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \end{aligned} \right.$$

dans chacune desquelles les coefficients des inconnues sont les éléments de l'une des lignes de U. Toutes les fois que l'on aura $U = 0$, ces équations seront vérifiées par des valeurs non toutes nulles de x, y, z, lesquelles satisfont aux équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} amx + bmy + cmz &= 0, \\ a'm'x + b'm'y + c'm'z &= 0, \\ a''m''x + b''m''y + c''m''z &= 0, \end{aligned} \right.$$

dont les premiers membres sont ceux des équations (1), multipliés respectivement par les éléments de la première colonne de V. En outre, les mêmes valeurs vérifieront encore les équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} (am+a'm'+a''m'')x+(bm+b'm'+b''m'')y+(cm+c'm'+c''m'')z&=0, \\ (an+a'n'+a''n'')x+(bn+b'n'+b''n'')y+(cn+c'n'+c''n'')z&=0, \\ (ap+a'p'+a''p'')x+(bp+b'p'+b''p'')y+(cp+c'p'+c''p'')z&=0. \end{aligned} \right.$$

En effet, la première résulte des équations (2), ajoutées membre à membre, et les autres ont été déduites, comme celles-ci, des équations (1); à cela près que les multiplicateurs employés, au lieu d'être les éléments de la première colonne

de V, sont ceux des autres colonnes, pris successivement. Le système (3) admet donc des solutions qui ne sont pas toutes nulles. Par suite, le déterminant de ses coefficients,

$$P = \begin{vmatrix} am + a'm' + a''m'' & bm + b'm' + b''m'' & cm + c'm' + c''m'' \\ an + a'n' + a''n'' & bn + b'n' + b''n'' & cn + c'n' + c''n'' \\ ap + a'p' + a''p'' & bp + b'p' + b''p'' & cp + c'p' + c''p'' \end{vmatrix},$$

est nul.

Or, ce déterminant n'est pas modifié lorsqu'on y remplace chaque élément de U par l'élément correspondant de V, et réciproquement; car la substitution n'a d'autre effet que de produire un échange entre les lignes et les colonnes. Pour $V = 0$, ou aura donc encore $P = 0$.

Ainsi, P s'annule en même temps que U, quel que soit V, et en même temps que V, quel que soit U; par conséquent, il est de la forme λUV, le facteur λ étant d'ailleurs numérique, puisque P et UV sont homogènes, et de même degré par rapport aux éléments de U et de V. Mais le produit $amb'n'c''p''$, du terme principal de U par le terme principal de V se trouve dans P, et ne s'y réduit avec aucun autre; on a donc $\lambda = 1$, d'où $P = UV$.

Remarque. — Ayant ainsi démontré d'abord la deuxième partie du théorème de Binet et de Cauchy, il suffit, pour en déduire la première, d'appliquer la formule précédente au produit de deux déterminants dans lesquels les éléments d'une ou de plusieurs lignes se trouvent remplacés par des zéros. On aura alors évidemment $P = 0$.

Quant à la troisième partie du même théorème, on vérifiera l'égalité qu'elle exprime, en formant, d'après la règle ci-dessus, les produits de déterminants qui figurent dans le second membre, développant ensuite les déterminants ainsi obtenus, et celui du premier membre, en déterminants à éléments monômes, enfin, supprimant, parmi ces derniers, ceux qui sont nuls comme renfermant des colonnes à éléments proportionnels.

SUR LES MOYENNES LIMITES DE DEUX NOMBRES

Par M. M. d'Ocagne.

Nous pensons qu'il ne sera pas sans intérêt pour les lecteurs du Journal, à propos de la question 208, pour laquelle M. Plamenewsky a donné de si curieux développements (*Journal*, p. 179), de prendre connaissance de certains résultats que nous avons publiés il y a quelques années dans le *Jornal de Sciencias mathematicas* (1886).

Étant donnés deux nombres a et b, insérons entre eux un certain nombre de termes d'une progression soit *arithmétique*, soit *géométrique*, soit *harmonique*. Prenons les moyennes *arithmétique*, *géométrique*, *harmonique* des termes de chacune de ces progressions. Lorsque nous faisons croître le nombre des termes indéfiniment, ces moyennes tendent vers des limites que nous appelons *moyennes limites* des nombres a et b et que nous représentons, respectivement, par :

$$\overline{\mathrm{AA}}(a, b), \quad \overline{\mathrm{GA}}(a, b), \quad \overline{\mathrm{HA}}(a, b);$$
$$\overline{\mathrm{AG}}(a, b), \quad \overline{\mathrm{GG}}(a, b), \quad \overline{\mathrm{HG}}(a, b);$$
$$\overline{\mathrm{AH}}(a, b), \quad \overline{\mathrm{GH}}(a, b), \quad \overline{\mathrm{HH}}(a, b).$$

Ces notations s'expliquent d'elles-mêmes. Ainsi, la moyenne $\overline{\mathrm{AG}}(a, b)$ est la limite de la moyenne arithmétique des termes d'une progression géométrique dont a et b sont les extrêmes, lorsque le nombre des termes de cette progression croît indéfiniment, ...

Quant aux symboles $\overline{\mathrm{AA}}$, $\overline{\mathrm{GG}}$, $\overline{\mathrm{HH}}$, ils représentent, respectivement, les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des nombres a et b.

M. Cesáro, dans une série de remarques fort intéressantes, publiées à la suite de notre article, a généralisé comme suit l'idée de *moyenne limite*.

Soient (en posant $a = x_1$, $b = x_n$) $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ une suite de n nombres tels que la suite $\Psi(x_1), \Psi(x_2), \Psi(x_3), \ldots \Psi(x_n)$ forme une progression arithmétique. Si nous posons

$$n\varphi(\mathrm{X}_n) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)$$

et que nous fassions croître n indéfiniment, la limite X, de X_n, sera dite une moyenne limite des nombres $a = x_1$, $b = x_n$.

Si l'on fait correspondre

la lettre A, à la fonction x;
— G, — $\log x$;
— H, — $\frac{1}{x}$;

on retrouve les moyennes limites définies tout à l'heure, et que nous avons calculées directement dans notre première Note.

Il est très facile de déterminer X dans le cas général.

En effet, si nous posons

$$\Psi(x_2) - \Psi(a) = \Psi(x_3) - \Psi(x_2) = \ldots = \Psi(b) - \Psi(x_{n-1})$$
$$= \frac{\Psi(b) - \Psi(a)}{n - 1} = \varepsilon,$$

nous pouvons écrire

$$\varphi(X_n) = \frac{\varepsilon\varphi(a) + \varepsilon\varphi(x_2) + \ldots + \varepsilon\varphi(x_{n-1})}{(n - 1)\varepsilon} + \frac{\varphi(b)}{n - 1}$$
$$= \frac{1}{\Psi(b) - \Psi(a)} \sum_{i=1}^{i=n-1} \Big[\Psi(x_{i+1}) - \Psi(x_i)\Big]\varphi(x_i) + \frac{\varphi(b)}{n - 1}.$$

Pour passer à la limite, on peut substituer à l'accroissement $\Psi(x_{i+1}) - \Psi(x_i)$ de la fonction $\Psi(x)$ sa différentielle $\Psi'(x_i)dx_i$. Comme d'ailleurs le terme $\frac{\varphi(b)}{n - 1}$ tend vers zéro, on voit que, à la limite, on a

$$(1) \qquad \varphi(X) = \frac{1}{\Psi(b) - \Psi(a)}\int_a \varphi(x)\Psi'(x)dx,$$

formule indirectement obtenue par M. Cesáro.

Voici les valeurs que donne cette formule pour nos six moyennes limites :

$$\varphi = \log x, \quad \Psi = x, \quad X = \overline{GA}(a, b) = \frac{1}{e}\cdot\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}};$$

$$\varphi = \frac{1}{x}, \quad \Psi = x, \quad X = \overline{HA}(a, b) = \frac{b - a}{\log b - \log a};$$

$$\varphi = x, \quad \Psi = \log x, \quad X = \overline{AG}(a, b) = \frac{b - a}{\log b - \log a};$$

$$\varphi = \frac{1}{x}, \qquad \Psi = \log x, \ X = \overline{\mathrm{HG}}(a, b) = ab\,\frac{\log b - \log a}{b - a};$$

$$\varphi = x, \qquad \Psi = \frac{1}{x}, \quad X = \overline{\mathrm{AH}}(a, b) = ab\,\frac{\log b - \log a}{b - a};$$

$$\varphi = \log x, \quad \Psi = \frac{1}{x}, \quad X = \overline{\mathrm{GH}}(a, b) = e\left(\frac{a^b}{b^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}.$$

De ce tableau on conclut

$$\overline{\mathrm{HA}}(a, b) = \overline{\mathrm{AG}}(a, b) = \frac{ab}{\overline{\mathrm{HG}}(a, b)} = \frac{ab}{\overline{\mathrm{AH}}(a, b)},$$

et

$$\overline{\mathrm{GA}}(a, b).\overline{\mathrm{GH}}(a, b) = ab,$$

égalités qui constituent de curieux théorèmes.

On voit encore que

$$e = 2.\overline{\mathrm{GH}}(1, 2),$$

egalité qui conduit à une nouvelle définition de la transcendante e.

Si l'on permute le rôle des fonctions φ et Ψ et qu'on appelle X la nouvelle moyenne obtenue, on a, d'après (1),

$$\Psi(X') = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)}\int_a^b \Psi(x)\varphi'(x)dx.$$

D'ailleurs, la formule de l'intégration par parties donne

$$\int_a^b \varphi(x)\Psi'(x)dx + \int_a^b \Psi(x)\varphi'(x)dx = \varphi(b)\Psi(b) - \varphi(a)\Psi(a).$$

Par conséquent

$$\varphi(X)[\Psi(b) - \Psi(a)] - \Psi(X')[\varphi(b) - \varphi(a)] = \varphi(b)\Psi(b) - \varphi(a)\Psi(a)$$

Cette formule, également remarquée par M. Cesáro, permet, lorsqu'on veut, par exemple, calculer $\overline{\mathrm{GA}}(a, b)$, d'obtenir $\overline{\mathrm{AG}}(a, b)$, sans avoir à effectuer de nouvelle intégration.

Si l'on pose $\quad \varphi(x) = x, \quad \Psi(x) = \sqrt{x},$

et qu'on prenne $a = 0, b = 1$, on voit que la moyenne limite X, correspondante, est le carré de la limite L que la question 208 proposait de rechercher. Or, avec cette forme des fonctions φ et Ψ, la formule (1) donne

$$\sqrt{X} = \frac{2}{3}\,\frac{b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{b - a}.$$

Puisque la limite cherchée L est égale à $\sqrt{X}$, pour $a = 0$, $b = 1$, on a

$$L = \frac{2}{3},$$

comme l'indiquait l'énoncé de la question citée.

EXERCICE ÉCRIT

35. — Lieu des foyers des ellipses de forme invariable qui se meuvent en restant inscrites à un angle droit donné.

Ce lieu est une sextique. On propose de trouver son équation par une voie purement analytique et de vérifier le résultat obtenu en retrouvant celui-ci, au moyen de certaines considérations géométriques.

Note sur l'exercice 34 :

Soient x_1, y_1 les coordonnées de A ; x_0, y_0 celles du point M, d'où partent les normales considérées. En posant OA′ = u, on a

(1) $$u = x_1 + p.$$

On sait que les abscisses des points A, B, C sont les racines de l'équation

(2) $$x(x + p - x_0)^2 = \frac{py_0^2}{2}.$$

Les relations (1), (2) donnent

(3) $$u^3 - u^2(2x_0 + p) + ux_0(x_0 + 2p) - p\left(x_0^2 + \frac{y_0^2}{2}\right) = 0.$$

La condition OA′ = B′C′, donne $u_3 = u_1 + u_2$; u_1, u_2, u_3 désignant les racines de (3). On a donc

(A) $$2u_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 2x_0 + p.$$

Finalement, le lieu décrit par M est la parabole représentée par l'équation

(4) $$y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

2° Pour démontrer que M est le milieu de CC′, il suffit d'observer que, d'après (A),

$$2(x_3 + p) = 2x_0 + p$$

ou

(5) $$x_0 - x_3 = \frac{p}{2}$$

La projection de CC′, sur l'axe ox, étant égale à p, on voit, par cette

égalité, que la projection de M, sur cet axe, se fait au milieu de la sous-normale. Ainsi M est le milieu de CC'.

3° Le lieu du pôle M' de AB est la corde focale principale.

En effet, l'équation (2), débarrassée de la racine $x_1 = x_0 - \frac{p}{2}$, donne, pour déterminer les abscisses des points A, B, l'équation

(6) $$x^2 - x\left(x_0 - \frac{3p}{2}\right) + \frac{p^2}{4} = 0.$$

Soient x', y' les coordonnées de M'; les abscisses des points A, B sont les racines de

(7) $$x^2 + 2x\left(x' - \frac{y'^2}{p}\right) + x'^2 = 0.$$

En identifiant (6) et (7), on a

(8) $$\frac{3p}{2} - x_0 = 2x' - \frac{2y'^2}{p}.$$

Mais on sait (Formules du pôle normal) que

(9) $$x_0 + x' = p + \frac{2y'^2}{p}.$$

En ajoutant (8) et (9), on a

$$x' = \frac{p}{2}.$$

Le lieu cherché est donc la corde focale principale.

4° Soient X_1, Y_1, les coordonnées du point A″, second point de rencontre de la normale MA avec la parabole.

On trouve facilement

(10) $$Y_1 y_1 + y_1^2 + 2p^2 = 0.$$

D'ailleurs, on sait que

(11) $$y_1^3 + 2py_1(p - x_0) - 2p^2 y_0 = 0.$$

Éliminant y_1 entre (10) et (11), on trouve que les ordonnées Y_1, Y_2, Y_3 des points A″, B″, C″ sont les racines de l'équation

(12) $$y_0 Y_1^3 + 2p(p - x_0)Y_1^2 - 2py_0(2p + x_0)Y_1 + 2p^2(y_0^2 + 2x_0^2) = 0.$$

Soient ξ, η les coordonnées du point G centre de gravité de A″B″C″.

On a $$3\eta = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{2p(x_0 - p)}{y_0}.$$

D'ailleurs, $$3\xi = X_1 + X_2 + X_3 = \frac{1}{2p}(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2).$$

D'autre part, (12) donne

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 - 2(Y_1 Y_2 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_1) = 4p\,\frac{6x_0^2 - 5x_0 p + 2p^2}{2x_0 - p}.$$

Finalement, en posant d'après la relation (4),

$$\frac{2y_0}{2x_0 - p} = \frac{p}{2y_0} = \frac{1}{t},$$

on trouve $$\frac{3X}{p} = \frac{3t^4 + t^2 + 2}{t^2}, \qquad \frac{3Y}{p} = 2\frac{t^2 - 1}{t}.$$

Le lieu est une quartique unicursale, formée de deux branches paraboliques se coupant sur l'axe ox, au point dont la distance au sommet O est égale à $2p$.

CONCOURS D'AGRÉGATION (1889)

Solution, par M. G. Leinekugel, élève au Lycée Charlemagne.

On considère un cône du second degré C *et deux quadriques* A, A' *inscrites au cône* C. *On considère les quadriques* S *inscrites au cône et tangentes en* α, α', *à* A, A'.

1° *La droite* α, α' *passe par un point fixe.*

2° *Lieu de la droite d'intersection des plans tangents de* S, *en* α, α'.

3° *Le lieu du pôle d'un plan fixe, par rapport aux surfaces* S *se compose de deux quadriques bitangentes.*

4° *Trouver le lieu des points de contact de ces quadriques lorsque le plan se déplace en restant parallèle à un plan tangent au cône* C.

I. (*) — Considérons les équations suivantes en coordonnées

(*) On peut donner, des deux premières questions, une solution géométrique, basée sur la propriété suivante :

Si l'on considère trois coniques (a), (a') et (s) bitangentes à une même conique (c), (s) étant de plus tangente à (a) et à (a') respectivement en α, α'; la droite $\alpha\alpha'$ passe par l'un des ombilics des coniques (a), (a'); et les tangentes en α, α' à (s) se coupent en l'un des axes de symptose de (a), (a'). (Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 356.)

Soit donc une quadrique (S) inscrite à une quadrique (C) et tangente, en α, α', aux quadriques (A), (A') inscrites à (C). Par la droite $\alpha\alpha'$ faisons passer un plan quelconque P : il coupe les quadriques (C), (A), (A') et (S) suivant les coniques (c), (a), (a') et (s); les trois dernières sont bitangentes à la première et (s) est tangente à (a) (a') en α, α'. D'après la propriété énoncée, les tangentes en α, α' à (s) se coupent en C sur l'un des axes de symptose AB de (a), (a'). Si nous faisons tourner le point P autour de $\alpha\alpha'$, la droite AB engendre l'un des deux plans des courbes planes communes aux quadriques (A), (A'); et le point C, qui reste constamment dans ce plan, décrit la droite d'intersection des deux plans tangents en α, α' à (S). D'où l'on déduit :

Étant données deux quadriques (A), (A') inscrites à une quadrique (C); on considère les quadriques (S) inscrites à (C) et tangentes en α, α' à (A) (A'); la droite d'intersection de deux plans tangents à (S) en α, α' se trouve constamment dans l'un des deux plans des courbes planes communes à (A) (A').

En transformant, par polaires réciproques, la propriété précédente, et en remarquant qu'aux deux courbes planes correspondent les sommets des deux cônes du second ordre circonscrits aux quadriques transformées de (A) (A'), on obtient le théorème suivant :

ponctuelles des quadriques (A), (A′) et (S) ayant une courbe plane commune C définie par les équations

$$(C) \begin{cases} C = o, \\ P = o, \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} (A) & C + A_1 P = o, \\ (A') & C + A_2 P = o, \\ (S) & C + SP = o. \end{array}$$

Si nous exprimons que S est tangente en α, α' à (A), (A′), c'est à-dire que les plans représentés par

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 - S = o, \\ A_2 - S = o, \end{cases}$$

coupent les quadriques (A), (A′) suivant deux droites, deux des quatre paramètres de (S) sont déterminés. Pour trouver le lieu de la droite $\alpha\alpha'$, intersection des plans tangents représentés par les égalités (1) nous aurons à éliminer les quatre paramètres entre les deux premières relations et les équations (1). L'élimination est faite, immédiatement, en retranchant ces deux équations et l'on a

$$A_1 - A_2 = o,$$

égalité qui démontre le théorème I; et, en transformant la première partie, que la droite $\alpha\alpha'$ passe par le sommet du second cône (C′) circonscrit aux quadriques (A), (A′) inscrites au cône (C).

II. — Considérons les quadriques (C), (A), (A′) et (S) ayant pour équations

$$(C) \qquad C = o,$$

Étant données deux quadriques (A), (A′), *inscrites à une quadrique* (C), *on considère les quadriques* (S) *inscrites à* (C) *et tangentes en* α, α' *à* (A), (A′) *la droite qui joint ces points passe par l'un des sommets des deux cônes du second ordre, circonscrits à* (A), (A′).

En considérant le cas particulier où la quadrique (B) est un cône, on a les solutions des deux premières parties.

Les propriétés corrélatives qui s'en déduisent sont les suivantes.

THÉORÈME I. — *On considère trois quadriques* (A), (A′) *et* (S) *passant par une courbe plane commune* C, (S) *étant de plus tangente à* (A), (A′), *en* α, α'; *la droite* $\alpha\alpha'$ *est située dans le plan de la seconde courbe plane commune à* (A), (A′).

THÉORÈME II. — *On considère trois quadriques* (A), (A′) *et* (S) *passant par une courbe plane commune,* (S) *étant de plus tangente à* (A), (A′) *en* α, α'; *la droite d'intersection des plans tangents à* (S) α, α' *c'est-à-dire des plans des secondes courbes planes communes à* (A) *et* (S), *à* (A′) *et* (S); *passe par l'un des sommets des cônes circonscrits à* (A) (A′).

$$(A) \qquad C - A_2^1 = 0,$$
$$(A') \qquad C - A_2^2 = 0,$$
$$(S) \qquad C - S^2 = 0,$$

S étant de la forme
$$S = ux + vy + wz + t = 0.$$

Si nous exprimons que l'un des plans $(A_1 - S)(A_1 + S) = 0$ est tangent à A, soit par exemple
$$A_1 - S = 0,$$
nous obtiendrons une relation entre les quatre paramètres de (S). De même, si nous exprimons que l'un des plans
$$(A_2 - S)(A_2 + S) = 0, \qquad \text{soit} \qquad A_2 - S = 0,$$
est tangent à (A'), nous aurons une seconde relation. Le lieu de la droite $\alpha\alpha'$ s'obtiendra par l'élimination de u, v, w et t entre les deux relations obtenues et les équations
$$A_1 - S = 0,$$
$$A_2 - S = 0,$$
qui définissent cette droite. Ce lieu est le plan représenté par $A_1 - A_2 = 0$. L'autre combinaison donnerait le second plan $A_1 + A_2 = 0$, commun à (A) (A').

III. — Cherchons le lieu du pôle d'un plan fixe P, par rapport à ces quadriques (S).
$$C = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$
$$A_1 = u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0, \quad C - A_1^2 = 0, \qquad (A_1)$$
$$A_2 = u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0, \quad C - A_2^2 = 0, \qquad (A')$$
$$S = ux + vy + wz + t = 0, \quad C - S^2 = 0. \qquad (S)$$
$$P = Ax + By + Cz + 1 = 0.$$

Exprimons que le plan $A_1 - S = 0$ est tangent à (A). Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point de contact, on a

(1) $$C_0 - A_{1,0}^2 = 0,$$

l'identification du plan $A_1 - S = (u - u_1)x + (v - v_1)y + (w - w_1)z + t - t_1 = 0$ avec le plan tangent à (A) au point $\alpha(x_0, y_0, z_0)$ donne les relations :
$$\frac{ax_0 - u_1A_{1,0}}{u - u_1} = \frac{a'y_0 - v_1A_{1,0}}{v - v_1} = \frac{a''z_0 - w_1A_{1,0}}{w - w_1} = \frac{-t_1A_{1,0}}{t - t_2};$$
desquelles on déduit

$$ax_0 = A_{1,0}\frac{(u_1t - ut_1)}{t - t_1},$$
$$a'y_0 = A_{1,0}\frac{(v_1t - vt_1)}{t - t_1},$$
$$a''z_0 = A_{1,0}\frac{(w_1t - wt_1)}{t - t_1}.$$

En substituant ces valeurs dans la relation (1) on obtient comme relation de condition

$$\frac{1}{a}(u_1t - ut_1)^2 + \frac{1}{a'}(v_1t - vt_1)^2 + \frac{1}{a''}(w_1t - wt_1)^2 = (t - t_1)^2.$$

On aura de même

$$\frac{1}{a}(u_2t - ut_2)^2 + \frac{1}{a'}(v_2t - vt_2)^2 + \frac{1}{a''}(w_2t - wt_2)^2 = (t - t_2)^2,$$

en exprimant que le plan $A_2 - S = 0$ est tangent à (A').

Les coordonnées (x, y, z) du pôle du plan P par rapport à (S) sont définies par les équations:,

$$\frac{ax - uS}{A} = \frac{a'y - vS}{B} = \frac{a''z - wS}{C} = -tS,$$

où
$$ax = S(u - tA),$$
$$a'y = S(v - tB),$$
$$a''z = S(w - tC).$$

En multipliant ces trois équations par x, y, z et en ajoutant il vient:

(2) $$C = S(S - tP).$$

En remplaçant u, v, w dans les deux relations de condition par leur valeurs, tirées des équations précédentes, on obtient, après développement:

$$(3)\quad\begin{cases} t^2\left[\frac{1}{a}(u_1 - t_1A)^2 + \frac{1}{a'}(v_1 - t_1B)^2 + \frac{1}{a''}(w_1 - t_1C)^2 - 1\right] \\ \quad - 2tt_1\left[\frac{1}{S}(A_1 - t_1P) - 1\right] + t_1^2\left(\frac{C}{S^2} - 1\right) = 0, \\ t^2\left[\frac{1}{a}(u_2 - t_2A)^2 + \frac{1}{a'}(v_2 - t_2B)^2 + \frac{1}{a''}(w_2 - t_2C)^2 - 1\right] \\ \quad - 2tt_2\left[\frac{1}{S}(A_2 - t_2P) - 1\right] + t_2^2\left(\frac{C}{S^2} - 1\right) = 0. \end{cases}$$

De l'équation (2), on déduit:

$$\frac{C}{S^2} - 1 = -t\frac{P}{S}.$$

Les équations (3) deviennent alors, si K_1, K_2 désignent les coefficients de t^2 :

$$(3') \quad \begin{cases} K_1tS + 2t_1S + t_1[Pt_1 - 2A_1] = 0, \\ K_2tS + 2t_2S + t_2[Pt_2 - 2A_2] = 0. \end{cases}$$

Il reste donc, pour trouver le lieu du pôle, à éliminer les deux paramètres S, (St) entre les trois équations (2) et (3′). Comme les deux dernières sont linéaires par rapport à ces paramètres, l'élimination est immédiate, et donne pour résultat :

$$(\Sigma) \quad [P(K_1t_2^2 - K_2t_1^2) - 2(A_2t_2K_1 - A_1t_1K_2)]^2$$
$$= 4(K_1t_2 - K_2t_1)\{Pt_1t_2[2(A_1 - A_2) - P(t_1 - t_2)] + C(K_1t_2 - K_2t_1)\}.$$

Si nous exprimions que le plan $A_1 + S = 0$ est tangent à (A), nous aurions comme résultat celui qui se déduit du premier résultat obtenu, en changeant de signe u, v, w, t, et comme équations analogues à (3′), les deux suivantes :

$$(3'') \quad \begin{cases} K_1tS - 2t_1S + t_1(Pt_1 - 2A_1) = 0, \\ K_2tS + 2t_2S + t_2(Pt_2 - 2A_2) = 0, \end{cases}$$

qui, avec (2), donnent pour lieu la quadrique (Σ')

$$(\Sigma') \quad [P(K_1t_2^2 - K_2t_1^2) - 2(A_2t_2K_1 - A_1t_1K_2)]^2$$
$$= 4(K_1t_2 + K_2t_1)\{Pt_1t_2[2(A_1 + A_2) - P(t_1 + t_2)] + C(K_1t_2 + K_2t_1)\},$$

les autres combinaisons de plan donnent les mêmes quadriques.

Ces deux quadriques (Σ), (Σ') sont inscrites à deux quadriques σ, σ' bitangentes, le long d'une de leurs courbes planes; en effet ces deux quadriques σ, σ' ont deux courbes planes communes situées dans les plans :

$$P = 0 \quad \text{et} \quad P(K_1t_2^2 - K_2t_1^2) - 2(A_2t_2K_1 - A_1t_1K_2) = 0,$$

le second plan étant le plan de contact de (Σ) avec (σ), et de (Σ') avec (σ'). Il en résulte que les deux quadriques (Σ), (Σ') sont bi-tangentes et que la droite qui joint les points de contact est déterminée par les deux plans précédents ou par les deux suivants :

$$\begin{cases} P = 0, \\ A_2t_2K_1 = A_1t_1K_2 = 0. \end{cases}$$

IV. — Si le plan P reste parallèle à un plan tangent au cône, son équation est de la forme

$$axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + \lambda = 0, \qquad [C_0 = 0]$$

on a donc
$$A = \frac{ax_0}{\lambda},$$
$$B = \frac{a'y_0}{\lambda},$$
$$C = \frac{a''z_0}{\lambda}.$$

Le lieu de la droite précédente s'obtient par l'élimination de λ entre les deux équations :
$$axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + \lambda = 0,$$
$$A_1t_1\left[\frac{u_2^2}{a} + \frac{v_2^2}{a'} + \frac{w_2^2}{a''} - 1\right] - A_2t_2\left[\frac{u_1^2}{a} + \frac{v_1^2}{a'} + \frac{w_1^2}{a''} - 1\right] =$$
$$\frac{q}{\lambda}[A_1t_1(u_2x_0 + v_2y_0 + w_2z_0) - A_2t_2(u_1x_0 + v_1y_0 + w_1z_0)],$$
ce qui donne le paraboloïde hyperbolique admettant, pour l'un de ses plans directeurs, le plan tangent
$$axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 = 0,$$
et pour l'une de ses génératrices la droite $A_1 = 0$, $A_2 = 0$.

Son équation est
$$axx_0+a'yy_0+a''zz_0]\left[A_1t_1\left(\frac{u_2^2}{a}+\frac{v_2^2}{a'}+\frac{w_2^2}{a''}-1\right)-A_2t_2\left(\frac{u_1^2}{a}+\frac{v_1^2}{a'}+\frac{w_1^2}{a''}-1\right)\right]$$
$$= 2[A_2t_2(u_1x_0 + v_1y_0 + w_1z_0) - A_1t_1(u_2x_0 + v_2y_0 + w_2z_0)].$$

Le lieu des points de contact des quadriques (Σ), (Σ') est donc, dans ce cas, la courbe d'intersection du cône et du paraboloïde précédent. Si, en particulier, les plans A_1, A_2 se coupaient suivant une droite parallèle à la génératrice du cône
$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$$
le lieu se composerait de cette droite et d'une conique. Le paraboloïde se réduit dans ce cas à ses deux plans directeurs.

Remarquons que, de la troisième partie, il résulte comme cas particulier que :

1° Le lieu des centres des quadriques (S) inscrites à un cône (C) et tangentes à deux quadriques (A), (A') inscrites à (C) se compose de deux quadriques bi-tangentes.

2° L'enveloppe des plans polaires d'un point fixe, par rapport aux quadriques (S) inscrites à un cône (C) tangentes à deux

quadriques (A), (A′) inscrites à (C), se compose de deux quadriques bi-tangentes, (Σ), (Σ′).

Quand le point fixe se déplace sur une droite, la droite qui joint les points de contact des quadriques (Σ), (Σ′) engendre une quadrique.

3° L'enveloppe des plans diamétraux conjugués d'une direction, dans les quadriques (S), se compose de deux quadriques.

QUESTION 216

Solution par G. Leinekugel, élève au lycée Charlemagne.

Étant donnée une ellipse Γ, *on peut adjoindre à tout point* f *du segment* FF′ *des foyers, une droite* d, *extérieure au plan de la courbe et parallèle au petit axe, telle qu'il existe un rapport constant entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au point* f *et à la droite* d. *La droite* d *engendre un cylindre dont la section droite est une courbe semblable à une ellipse donnée.*

Trouver le théorème analogue pour l'hyperbole et le parabole.

Prenons pour axes des x et des y les axes de Γ et pour axe des z la perpendiculaire au plan de l'ellipse menée par le centre. Soient α, β, ν les coordonnées d'un point de l'ellipse et l'abscisse de f. On a la relation

$$(1)\qquad \frac{(\alpha-\nu)^2+\beta^2}{\lambda^2+(\mu-\alpha)^2}=R^2,$$

en représentant par $z=\lambda, x=\mu,$ les équations de la droite d. La relation doit avoir lieu pour tout point (α, β) de l'ellipse; a donc

$$(2)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1=0.$$

Entre (1) et (2) éliminons β^2; puis, ordonnons par rapport à α. Il vient

$$\alpha^2(c^2+a^2k^2)-2\alpha a^2(\nu-\mu k^2)+a^2(\nu^2+b^2)-R^2(\lambda^2+\mu^2)=0.$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit α, on en tire

$$R^2 = \frac{c^2}{a^2}, \qquad \nu = \mu R^2, \qquad \nu^2 + b^2 = R^2(\lambda^2 + \mu^2).$$

L'élimination de λ, μ, ν donne l'équation du lieu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2}.$$

La surface correspondante est un cylindre elliptique; ses génératrices sont parallèles au petit axe de l'ellipse, et sa section droite, dans le plan de zx, est une courbe semblable à l'ellipse donnée.

Le résultat, dans le cas de l'hyperbole, s'obtient en changeant b^2 en $-b^2$.

Enfin, dans le cas de la parabole, on remplace, dans (1), β^2 par $2p\alpha$ et, en suivant la même marche, on trouve

$$x^2 + z^2 = (x + p)^2.$$

La parabole qui correspond à cette équation et qui représente la section droite du cylindre cherché, admet l'origine comme foyer.

La directrice est la droite qui correspond à l'équation

$$x + p = 0.$$

NOTA. — Solution analogue par M. Delbourg, à Agen.

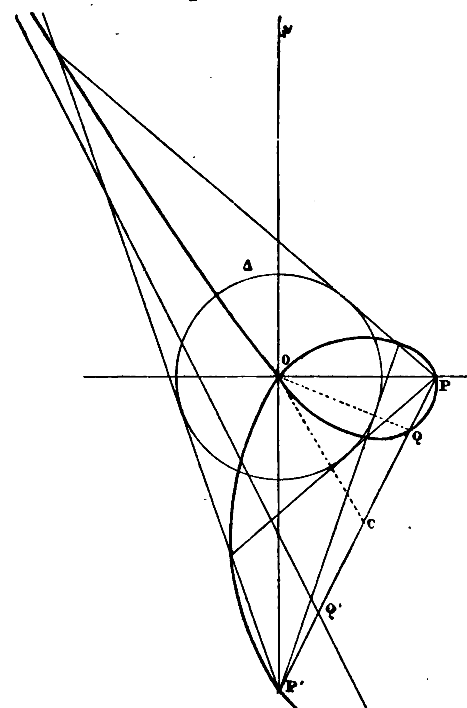
QUESTION 218

Solution par M. D. COTONÉ.

On considère une strophoïde oblique S *ayant pour point double le point* O. *Les tangentes en* O *ont, pour bissectrices des angles qu'elles forment, deux droites* Δ, Δ' *qui rencontrent* S *respectivement aux points* P *et* P'.

Démontrer les propriétés suivantes : 1° La projection de O, *sur* PP', *est un point* Q *situé sur* S ; *2° le point* Q', *isotomique de* Q *sur* PP', *appartient à l'asymptote réelle de* S; *3° cette asymptote est parallèle à la droite qui joint* O *au milieu de* PP'. *4° Si, du point* O *comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit un cercle* Δ, *les tangentes issues des points* P, P' *à ce cercle, se coupent en quatre points situés sur* S. (G. L.)

Prenons pour axes de coordonnées les droites D, D′. L'équation de la strophoïde S est alors :



(A)
$$(x^2 + y^2)(mx + ny) + x^2 - y^2 = 0.$$

Par suite

$$OP = -\frac{1}{m},$$

$$OP' = \frac{1}{n}.$$

La droite PP′ a pour équation :

$$mx - ny + 1 = 0,$$

l'équation de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite étant :

$$nx + my = 0,$$

le point Q a pour coordonnées

$$x = -\frac{m}{m^2 + n^2},$$

$$y = \frac{n}{m^2 + n^2}:$$

elles vérifient l'équation (A).

2° Pour démontrer que PQ = P′Q′, il suffit de vérifier que

$$proj.\ PQ = proj.\ P'Q'.$$

Or

(1) $$proj.\ PQ = abscіss.\ P - abscіss.\ Q = -\frac{1}{m} + \frac{m}{{}^2 + n^2}$$
$$= -\frac{n^2}{m(m^2 + n^2)}.$$

D'ailleurs, l'équation de l'asymptote de la strophoïde étant :

$$mx + ny - \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = 0,$$

le point Q′ a pour abscisse :

(2) $$x = -\frac{n^2}{m(m^2 + n^2)}.$$

Les égalités (1), (2) établissent la propriété en question

3° Le point C, milieu de PP', a pour coordonnées:

$$x = -\frac{1}{2m}, \qquad y = \frac{1}{2m}.$$

ce qui prouve que OC est parallèle à l'asymptote réelle de la courbe.

4° Soit $$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$
l'équation d'un des cercles considérés. L'équation d'une tangente à ce cercle est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R = 0,$$

où φ est déterminé par la condition que cette tangente passe au point P, ce qui donne

(3) $$\cos \varphi + mR = 0.$$

De même, l'équation de la tangente passant par le point P' sera

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0,$$

avec la condition

(4) $$\sin \alpha - nR = 0.$$

Ces tangentes se coupent au point dont les coordonnées sont:

$$x = -\frac{R(\sin \alpha - \sin \varphi)}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

$$y = \frac{R(\cos \alpha - \cos \varphi)}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

Nous avons donc

$$x^2 + y^2 = \frac{2R^2}{\sin^2(\varphi - \alpha)}[1 + mR \cos \alpha - nR \sin \varphi],$$

$$mx + ny = \frac{R}{\sin(\varphi - \alpha)}[n \cos \alpha + m \sin \varphi],$$

$$y^2 - x^2 = \frac{2R^3}{\sin^2(\varphi - \alpha)}[R(m^2 - n^2) + m \cos \alpha + n \sin \varphi].$$

Par conséquent, l'équation (A) devient

$$\frac{2R^3}{\sin^3(\varphi - \alpha)}[1 + mR \cos \alpha - nR \sin \varphi](n \cos \alpha + m \sin \varphi)$$
$$= \frac{2R^3}{\sin^2(\varphi - \alpha)}[R(m^2 - n^2) + m \cos \alpha + n \sin \varphi].$$

En simplifiant, on trouve

$$R[mn \cos^2 \alpha - mn \sin \varphi + (mn^2 - n^2) \sin \alpha \cos \varphi] - \cos(\varphi - \alpha)$$
$$[n \cos \varphi + m \sin \alpha] = 0,$$

expression identique, en vertu des relations (3) et (4). Ainsi, les tangentes menées des points P, P′. aux cercles considérés dans l'énoncé, se coupent sur la strophoïde.

NOTA. — Nous avons reçu diverses solutions de cette question de MM. : Étienne Pascot, de Montpellier, Rézeau, conducteur des Ponts et Chaussées à La Roche-sur-Yon. M. Leinekugel, élève au Lycée Charlemagne nous a communiqué une très élégante démonstration géométrique.

QUESTION 223

Solution par M. L. REZEAU, conducteur des Ponts et Chaussées, à La Roche-sur-Yon.

On donne une ellipse E. *On demande le lieu des centres des cercles qui coupent cette ellipse en des points tels que trois d'entre eux soient les sommets d'un triangle équilatéral. — Enveloppe de la droite qui joint le centre de l'un de ces cercles au quatrième point d'intersection. — Lieu du milieu de cette droite.*

1° Soient :

(E) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

(C) $$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + k^2 = 0,$$

les équations représentant : la première, l'ellipse considérée, rapportée à ses axes principaux comme axes de coordonnées ; l'autre, un cercle quelconque.

L'équation aux abscisses des points d'intersection de l'ellipse et du cercle est :

$$[x^2(a^2 - b^2) - 2a^2\alpha x + a^2(k^2 + b^2)]^2 + 4a^2b^2\beta^2(x^2 - a^2) = 0.$$

La somme des racines de cette équation est :

$$\frac{4a^2\alpha}{a^2b^2}.$$

Trois des points d'intersection étant les sommets d'un triangle équilatéral inscrit au cercle C dont le centre est (α, β), la somme des abscisses correspondantes sera 3α. On aura donc, $P(x_4, y_4)$ étant le quatrième point d'intersection,

$$3\alpha + x_4 = \frac{4a^2\alpha}{a^2 - b^2}; \qquad \text{d'où} \qquad x_4 = \frac{\alpha(a^2 + 3b^2)}{a^2 - b^2}.$$

En cherchant l'équation aux ordonnées des points d'intersection et en faisant un raisonnement analogue, on trouverait :

$$3\beta + y_4 = -\frac{4b^2\beta}{a^2 - b^2}, \quad \text{d'où} \quad y_4 = -\frac{\beta(3a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}.$$

Les coordonnées du point P doivent vérifier (E). On a donc :

$$(1) \qquad \frac{(a^2 + 3b^2)^2}{a^2(a^2 - b^2)^2}\alpha^2 + \frac{(3a^2 + b^2)^2}{b^2(a^2 - b^2)^2}\beta^2 - 1 = 0.$$

Le lieu des centres des cercles C est, par conséquent, l'ellipse représentée par

$$\frac{(a^2 + 3b^2)^2}{a^2(a^2 - b^2)^2}x^2 + \frac{(3a^2 + b^2)^2}{b^2(a^2 - b^2)^2}y^2 - 1 = 0.$$

2° L'équation de la droite CP est :

$$\frac{y - \beta}{\beta + \dfrac{\beta(3a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}} = \frac{x - \alpha}{\alpha - \dfrac{\alpha(a^2 + 3b^2)}{a^2 - b^2}},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{a^2x}{\alpha} + \frac{b^2y}{\beta} = a^2 + b^2.$$

On obtient l'enveloppe des droites CP en éliminant α et β entre (1) (2) et l'équation obtenue en égalant le rapport des dérivées de (1) et de (2), prises successivement par rapport à α et à β.

On a donc

$$\frac{\dfrac{a^2x}{\alpha^2}}{\dfrac{b^2y}{\beta^2}} = \frac{\dfrac{\alpha(a^2 + 3b^2)^2}{a^2(a^2 - b^2)^2}}{\dfrac{\beta(3a^2 + b^2)^2}{b^2(a^2 - b^2)^2}},$$

ou

$$\frac{a^4(3a^2 + b^2)^2x}{\alpha^3} = \frac{b^4(a^2 + 3b^2)^2y}{\beta^3}.$$

Posons : $\dfrac{a^4(3a^2 + b^2)^2x}{\alpha^3} = \dfrac{b^4(a^2 + 3b^2)^2y}{\beta^3} = \dfrac{\lambda^3}{1}$,

$$\alpha = \lambda a[ax(3a^2 + b^2)^2]^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = \lambda b[by(a^2 + 3b^2)^2]^{\frac{1}{3}}.$$

L'équation (1) devient :

$$\lambda^2\left[\left(\frac{ax}{3a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2 + 3b^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(3a^2 + b^2)^2(a^2 + 3b^2)^2};$$

et l'équation (2) :

$$\left(\frac{ax}{3a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2 + 3b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \lambda(a^2 + b^2).$$

En éliminant λ entre ces deux dernières équations, on trouve

$$\lambda = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{3}}(3a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}(3a^2 + b)^{2\frac{2}{3}}}.$$

Cette valeur de λ portée dans l'une de ces deux équations, donne l'équation du lieu :

$$\left(\frac{ax}{3a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2 + 3b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}(a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}}{(a^2 + 3b^2)^{\frac{2}{3}}(3a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}}$$

laquelle peut se mettre sous la forme :

$$\left[\frac{a(a^2 + 3b^2)}{a^4 - b^4}\,x\right]^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{b(3a^2 + b^2)}{a^4 - b^4}\,y\right]^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette équation représente une développée de l'ellipse dont les axes sont :

$$2\,\frac{a(a^2 + b^2)(a^2 + 3b^2)}{(a^2 - b^2)^2}, \qquad 2\,\frac{b(a^2 + b^2)(3a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2}.$$

3° Soient x', y' les coordonnées du point M, milieu de CP; on a

$$x' = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha(a^2 + 3b^2)}{a^2 - b^2} + \alpha\right], \qquad y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-\beta(3a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} + \beta\right];$$

d'où

$$\alpha = \frac{(a^2 - b^2)x'}{a^2 + b^2} \qquad \beta = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}\,y'.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve :

$$\frac{(a^2 + 3b^2)^2}{a^2(a^2 + b^2)^2}\,x'^2 + \frac{(3a^2 + b^2)^2}{b^2(a^2 + b^2)^2}\,y'^2 - 1 = 0.$$

Ainsi, le lieu des points M est une ellipse dont les axes sont :

$$2a\,\frac{(a^2 + b^2)}{a^2 + 3b^2}, \qquad 2b\,\frac{(a^2 + b^2)}{3a^2 + b^2}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Clapier, de Montpellier; Leinekugel, élève au lycée Charlemagne.

QUESTION 224

Solution par M. L. Delbourg, maître répétiteur à Agen.

Étant donnés, dans un plan, deux droites et un point fixe, on fait tourner une droite autour de ce point. Trouver le lieu des points de contact, situés sur cette droite, des circonférences tangentes aux deux droites fixes données et à la droite mobile.

Prenons pour axes de coordonnées les bissectrices des angles formés par les deux droites fixes. Les circonférences ont leurs centres sur ces bissectrices; nous ne considérerons que les circonférences qui ont leurs centres sur l'un des axes, l'axe des x par exemple; les autres circonférences donnant un lieu tout à fait semblable.

Soient θ le demi-angle des droites données et a l'abscisse du centre de l'une des circonférences. Celle-ci a pour équation

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta.$$

Une droite mobile autour du point fixe $P_1(\alpha\beta)$ a pour équation

$$(1) \qquad y - \lambda x - (\beta - \lambda\alpha) = 0.$$

Elle sera tangente au cercle si l'on a

$$(2) \qquad \frac{[\lambda a + \beta - \lambda\alpha]^2}{1 + \lambda^2} = a^2 \sin^2 \theta.$$

Le point de contact sera à l'intersection de la droite (1) et du rayon perpendiculaire à cette droite, lequel rayon a pour équation

$$(3) \qquad y = -\frac{1}{\lambda}(x - a).$$

L'élimination de λ et a entre les équations (1), (2) et (3) donnera le lieu cherché.

Les relations (1) et (3) donnent

$$\lambda = \frac{y - \beta}{x - \alpha},$$

$$a = \frac{x(x - \alpha) + y(y - \beta)}{x - \alpha}.$$

Substituons dans (2); nous trouvons

$$\{(y - \beta)[x(x - \alpha) + y(y - \beta)] + (x - \alpha)(\beta x - \alpha y)\}^2$$
$$= \sin^2 \theta[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2][x(x - \alpha) + y(y - \beta)]^2.$$

Transportons l'origine au point P. Les formules de transformation sont

$$x = X + \alpha$$
$$y = Y + \beta.$$

Nous obtenons, après avoir simplifié, puis supprimé le facteur $(X^2 + Y^2)$, commun aux deux membres :

$$(4) \qquad (X^2 + Y^2)(Y + \beta)^2 = \sin^2 \theta\, [X(X + \alpha) + Y(Y + \beta)]^2.$$

INTERSECTION AVEC LES AXES. — La courbe rencontre

1° l'axe des y aux points donnés par

$$y^2 (y + \beta)^2 \cos^2 \theta = 0;$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 = 0, \\ (y + \beta)^2 = 0, \end{array} \right.$$

2° l'axe des x aux points définis par

$$\beta^2 X^2 = \sin^2 \theta X^2 (X + \alpha)^2$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} X^2 = 0 \\ X = -\alpha \pm \dfrac{\beta}{\sin \theta}. \end{array} \right.$$

POINTS DOUBLES. — Le point donné P, le sommet de l'angle et le point $\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = -\beta, \end{array} \right.$ sont les points doubles. Nous allons examiner s'ils sont réels ou imaginaires.

1° P *point donné*. — Le faisceau de tangentes en ce point a pour équation

$$(X^2 + Y^2)\beta^2 = \sin^2 \theta (\alpha Y + \beta X)^2.$$

Il est réel si l'on a

$$\alpha^2 \beta^2 \sin^4 \theta - \beta^2 \cos^2 \theta (\beta^2 - \alpha^2 \sin^2 \theta) \geqslant 0$$

ou

$$\alpha^2 \sin^2 \theta - \beta^2 \cos^2 \theta \geqslant 0$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 \theta \geqslant \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

Le point P est réel s'il est extérieur à l'angle considéré, imaginaire s'il est intérieur. Nous étudierons plus loin le cas particulier où $\operatorname{tg}^2 \theta = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

2° *Sommet de l'angle*. — Transportons l'origine en ce point, par les formules

$$X = x - \alpha, \qquad Y = y - \beta.$$

L'équation de la courbe devient

$$(5) \quad [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]y^2 = \sin^2 \theta [x(x - \alpha) + y(y - \beta)]^2.$$

Les tangentes, au sommet de l'angle, correspondent à l'équation

$$(\alpha^2 + \beta^2) y^2 = \sin^2 \theta (\alpha x + \beta y)^2$$

Elles sont donc toujours réelles.

3° Le troisième point est aussi un point double toujours réel. Dans le cas particulier où $\operatorname{tg}^2 \theta = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$, les tangentes en ce point sont rectangulaires.

ASYMPTOTES. — La courbe admet deux asymptotes réelles : ce sont les droites fixes données.

De ces remarques, on déduit facilement la forme affectée par la courbe dans l'hypothèse $\alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta > \beta^2$ et celle qui correspond à la seconde hypothèse $\alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta < \beta^2$. Dans le cas où $\alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta = \beta^2$, on a une strophoïde oblique.

NOTA. — Solutions diverses par M. Giovanni Russo à Catanzaro; H. Brocard; Leinekugel, élève au lycée Charlemagne.

QUESTIONS PROPOSÉES

293. — Soit un triangle ABC. Désignons par A′, B′, C′, A″, B″, C″ les deux groupes d'angles latéraux (voir *J. S.* p. 95), positifs ou négatifs, et numériquement plus petits que 180°, formés par les côtés du triangle et les transversales angulaires d'un point M (*). Connaissant ces angles, prouver que les autres coordonnées sont données par les formules suivantes :

$$(1) \qquad \frac{y}{z} = \frac{\sin A''}{\sin A'} = \sin A\,(\operatorname{cotg} A' - \operatorname{cotg} A) \ (**),$$

$$(2) \qquad x^2 \frac{\sin C' \sin B''}{\sin C'' \sin B'} = y^2 \frac{\sin A' \sin C''}{\sin A'' \sin C'} = \dots$$

$$(3) \qquad x^2 \frac{b(\cot B' - \cot B)}{c(\cot C' - \cot C} = y^2 \frac{c(\cot C' - \cot C)}{a(\cot A' - \cot A)} = \dots$$

(*) On sait qu'il y a, entre ces angles, les relations équivalentes :

$$(A) \qquad \sin A' \sin B' \sin C' = \sin A'' \sin B'' \sin C'',$$

$$(B) \qquad (\cot A' - \cot A)(\cot B' - \cot B)(\cot C' - \cot C) = \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{2R^2}{S}.$$

Elles permettent de calculer A′, connaissant les deux angles du même groupe B′, C′. Pour (A), la démonstration la plus simple n'est pas celle de Crelle (*J. E.* 1890, p. 33), fondée sur le théorème de Céva, mais celle que M. Morel (*J. E.* 1883, p. 12) a donnée par les tripolaires (en les désignant par x, y, z).

(**) Inversement, on tire de (1) la formule

$$(C) \qquad \cot A' = \cot A + \frac{y}{z \sin A} = \cot A + \frac{c^2\beta}{2S\gamma},$$

qui fournit A′ en fonction de x, y, z. Elle a été donnée par M. Boutin (*J. E.* 1888, p. 280). On aurait les sinus et cosinus de A′ en passant par les

(4) $\alpha[\cot(B' + C'') + \cot A] = \beta[\cot(C' + A'') + \cot B]$
$= \gamma[\cot(A' + B'') + \cot C].$

(5, 6, 7) $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\cot C + \cot A'}{\cot B + \cot A''} = \frac{\cot C'' + \cot A'}{\cot B' + \cot A''}$
$= \frac{\cot C - \cot C''}{\cot B - \cot B'}.$

(8) $$\lambda = \frac{b \sin C'}{\sin(C' + A'')}.$$

(A. Poulain.)

294. — On considère toutes les coniques passant par quatre points donnés, abstraction faite des systèmes de deux droites. Quelles sont les droites dont chacune a ses pôles, par rapport à ces coniques, sur une même ligne droite? *(A. Tissot.)*

295.—Sur un diamètre D d'une ellipse donnée on décrit une circonférence de cercle et l'on mène une tangente commune à ces deux courbes. Démontrer que la partie de cette tangente, comprise entre les points de contact, est égale à la projection, sur D, du demi-diamètre qut lui est conjugué.

(Mannheim.)

---

tripolaires, comme dans la question 282 (6°). La formule (C) donne cot A'', si l'on y échange β avec γ et b avec c. De la formule (C), on déduit facilement l'angle A' que fait avec AB une droite quelconque

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Car en menant une parallèle, par A, on trouve

$$\cot A' = \cot A - \frac{c^2(n - l)}{2S(m - l)};$$

et, de cette formule, on peut déduire, *sous une forme nouvelle*, l'angle A'—A', de deux droites.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18756-9-90.

LES COURBES ET LES SURFACES ÉPICYCLOIDALES

Par M. **Svéchnicoff**, professeur au Gymnase de Troïtzk.

On sait que *la courbe épicycloïdale* est engendrée par un point donné d'une circonférence qui roule, sans glisser, sur une circonférence fixe; les plans de ces circonférences formant un angle constant.

Désignons par a le rayon du cercle roulant C, par na le rayon du cercle fixe O, et par α l'angle des plans de ces cercles. Rapportons la courbe aux axes des coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, de sorte que le plan des XY coïncide avec le plan du cercle fixe. On peut déterminer chaque point de la courbe par la construction suivante.

Prenons un point P sur la circonférence fixe, et désignons par φ l'angle POX. Les coordonnées du point P sont

$$na \cos \varphi,\ na \sin \varphi,\ 0.$$

Menons la droite PC ayant la longueur a et formant l'angle α avec le plan XY, de sorte que sa projection PQ sur ce plan coïncide avec la droite OP. Par la droite PC, menons le plan faisant l'angle α avec le plan XY. Menons, sur ce plan, la droite CM égale à a, de façon que l'angle MCP soit égal à $n\varphi$; M appartient à la courbe épicycloïdale. Les coordonnées de ce point sont:

$$(1)\quad \begin{cases} x = a[n \cos \varphi + (1 - \cos n\varphi) \cos \varphi \cos \alpha + \sin n\varphi \sin \varphi] \\ y = a[n \sin \varphi + (1 - \cos n\varphi) \sin \varphi \cos \alpha - \sin n\varphi \cos \varphi] \\ z = a(1 - \cos n\varphi) \sin \alpha. \end{cases}$$

En posant dans ces équations $\alpha = 0$, ou $\alpha = \pi$, on trouve les équations de l'épicycloïde ou de l'hypocycloïde. En général, la courbe épicycloïdale est formée d'une infinité de branches égales entre elles, et les points où ces branches se terminent sur le cercle fixe sont des points de rebroussement. Le nombre de branches devient limité quand n est un nombre rationnel.

Les deux premières équations (1) donnent

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 n\varphi + a^2 \{n + (1 - \cos n\varphi) \cos \alpha\}^2.$$

Cette équation, et la troisième des équations (1), donnent

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r,$$

si l'on pose

$$(2)\quad c = \frac{a(1 + n\cos\alpha)}{\sin\alpha}, \qquad r = \frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{1 + 2n\cos\alpha + n^2}.$$

Ainsi la courbe épicycloïdale est située sur une sphère.

Désignons par s la longueur d'un arc de cette courbe (*).

En posant $\quad \mathrm{E} = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2,$

on a :

$$ds = \sqrt{\mathrm{E}}\, d\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a(n + \cos\alpha)(1 - \cos n\varphi)\sin\varphi + a(1 + n\cos\alpha)\sin n\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a(n + \cos\alpha)(1 - \cos n\varphi)\cos\varphi + a(1 + n\cos\alpha)\sin n\varphi\sin\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = na\sin\alpha\sin n\varphi,$$

$$\mathrm{E} = a^2(n + \cos\alpha)^2(1 - \cos n\varphi)^2 + a^2(1 + n\cos\alpha)^2\sin^2 n\varphi + n^2a^2\sin^2\alpha\sin^2 n\varphi,$$

$$\mathrm{E} = 4a^2\sin^2\frac{n}{2}\varphi\left[(n + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\cos^2\frac{n}{2}\varphi\right].$$

$$ds = 2a\sin\frac{n}{2}\varphi\sqrt{(n + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\cos^2\frac{n}{2}\varphi}\, d\varphi.$$

L'arc d'une branche est égal à

$$\frac{4a}{n}\sqrt{1 + 2n\cos\alpha + n^2} + \frac{4a(n + \cos\alpha)^2}{n\sin\alpha}\,\mathrm{L}\,\frac{\sin\alpha + \sqrt{1 + 2n\cos\alpha + n^2}}{n + \cos\alpha}.$$

En faisant varier l'angle α, de o jusqu'à 2π, nous formons l'ensemble des courbes épicycloïdales.

Ces courbes engendrent la surface épicycloïdale, qui limite le corps épicycloïdal. Les équations (1) représentent la surface épicycloïdale, si l'on considère φ et α comme des paramètres variables.

Calculons l'aire S et le volume V du corps épicycloïdal.

(*) C'est l'*épicycloïde sphérique*. (Voir : Leroy, *Géométrie descriptive*, p. 241, dans l'édition de 1842, ou p. 209 dans celle de 1859.)

Posons: $$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2 = G,$$
$$\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\alpha} + \frac{dz}{d\varphi}\cdot\frac{dz}{d\alpha} = F.$$

Des égalités
$$\frac{dx}{d\alpha} = - a \sin\alpha\,(1 - \cos n\varphi)\cos\varphi,$$
$$\frac{dy}{d\alpha} = - a \sin\alpha\,(1 - \cos n\varphi)\sin\varphi,$$
$$\frac{dz}{d\alpha} = a \cos\alpha\,(1 - \cos n\varphi),$$
nous tirons successivement
$$G = a^2(1 - \cos n\varphi)^2 = 4a^2 \sin^4 \frac{n}{2}\varphi,$$
$$F = - a^2 \sin\alpha \sin n\varphi(1 - \cos n\varphi) = - 4a^2 \sin\alpha \sin^3 \frac{n}{2}\varphi \cos \frac{n}{2}\varphi.$$

On sait que $$dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi d\alpha,$$
$$dS = 4a^2 \sin^3 \frac{n}{2}\varphi(n + \cos\alpha) d\varphi d\alpha;$$
par suite
$$S = 4a^2 \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sin^3 \frac{n}{2}\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} (n + \cos\alpha) d\alpha$$
$$= 8n\pi a^2 \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sin^3 \frac{n}{2}\varphi d\varphi = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

Ensuite,
$$dV = z\left(\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\alpha} - \frac{dx}{d\alpha}\frac{dy}{d\varphi}\right) d\varphi d\alpha$$
$$= a^3 \sin^2\alpha(n + \cos\alpha)(1 - \cos n\varphi)^3\, d\varphi d\alpha$$
$$V = a^3 \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1 - \cos n\varphi)^3 d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha(n + \cos\alpha) d\alpha$$
$$= n\pi a^3 \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1 - \cos n\varphi)^3 d\varphi = 5\pi^2 a^3.$$

Il est très remarquable que l'aire et le volume de chaque partie du corps épicycloïdal ne dépende que du rayon du cercle roulant.

Les équations de la normale à la surface épicycloïdale, en un point M(x, y, z), sont

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}.$$

D'ailleurs :

$$A = \frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\alpha} - \frac{dz}{d\varphi}\frac{dy}{d\alpha},$$

$$B = \frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\alpha} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dz}{d\alpha},$$

$$C = \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\alpha} - \frac{dy}{d\varphi}\frac{dx}{d\alpha};$$

on a donc

$$A = a(n + \cos\alpha)(1 - \cos n\varphi)(x - na\cos\varphi),$$

$$B = a(n + \cos\alpha)(1 - \cos n\varphi)(y - na\sin\varphi),$$

$$C = a(n + \cos\alpha)(1 - \cos n\varphi)z.$$

D'après ces calculs, la normale est représentée par

$$(3) \qquad \frac{X - x}{x - na\cos\varphi} = \frac{Y - y}{y - na\sin\varphi} = \frac{Z - z}{z}.$$

Elle passe par le point ayant pour coordonnées

$$X = na\cos\varphi, \qquad Y = na\sin\varphi, \qquad Z = 0.$$

C'est le point de contact des circonférences O et C qui engendrent la courbe épicycloïdale et la surface épicycloïdale. Le plan normal à la courbe épicycloïdale est déterminé par les trois points suivants : 1° le point donné sur la courbe; 2° le point de contact des cercles engendrant; 3° le centre de la sphère sur laquelle la courbe est située.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(CONCOURS DE 1890)

Mathématiques spéciales.

On donne un triangle ABC et un point P dans son plan.

1° Trouver le lieu des centres des coniques S inscrites au triangle ABC et qui sont vues du point P sous un angle donné ω.

2° Discuter ce lieu en supposant que le point P se déplace dans le plan du triangle.

3° Démontrer que, si l'angle donné ω est droit, toutes les coniques S sont vues aussi, sous un angle droit, d'un autre point P'. Montrer que, dans ce cas, si le point P se déplace, la droite PP' passe par un point fixe I et que le produit IP.IP' est constant.

Solution par M. E. A.

Prenons CA et CB pour axes des x et des y. Soit

$$bx + ay - ab = 0,$$

l'équation de AB.

Soient A'B' une des droites passant par le point $P(x_0y_0)$ et son équation

$$b'x + a'y - a'b' = 0.$$

Soit enfin $$b''x + a''y - a''b'' = 0,$$

l'équation de la droite A''B'' qui passe aussi au point P et qui fait, avec A'B', un angle ω.

La conique inscrite à cet angle et au triangle ABC est inscrite au quadrilatère que A'B' forme avec les côtés du triangle ABC. Son centre est donc sur la droite qui joint le milieu M de AB' $\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b'}{2}\right)$ au milieu N de A'B $\left(x = \frac{a'}{2},\right.$ $\left.y = \frac{b}{2}\right)$, droite qui a pour équation

(1) $$2x(b' - b) + 2y(a' - a) + ab - a'b' = 0.$$

On voit de même que le centre de la conique considérée se trouve sur une autre droite ayant pour équation

(2) $$2x(b'' - b) + 2y(a'' - a) + ab - a''b'' = 0.$$

D'autre part, en désignant par θ l'angle C des axes :

(3)
$$a'a'' + b'b'' - (a'b'' + b'a'')\cos\theta = (a'b'' - b'a'')\sin\theta\cot\omega.$$

On a enfin, en exprimant que les droites A'B', A''B'' passent au point P,

(4) $$b'x_0 + a'y_0 - a'b' = 0,$$

(5) $$b''x_0 + a''y_0 - a''b'' = 0.$$

Il s'agit d'éliminer a', b', a'' et b'' entre ces cinq équations.

Éliminant b' entre (1) et (4) on a une équation en a', du second degré, et dont les racines sont a' et a''. Cette équation donne donc, en posant

$$bx + ay - \frac{ab}{2} = \mathrm{P} :$$

(6) $$a'a'' = \frac{\mathrm{P}x_0}{y - \frac{y_0}{2}}.$$

Par analogie,

(7) $$b'b'' = \frac{\mathrm{P}y_0}{x - \frac{x_0}{2}}.$$

Dans la formule (3), en vue de laquelle nous avons calculé ces produits, se trouve aussi la quantité $a'b'' + b'a''$. Pour la calculer, observons que l'équation (1) peut s'écrire

$$b'x + a'y - \frac{a'b'}{2} = \mathrm{P},$$

et que, si on en retranche la suivante, qui équivaut à l'équation (4)

$$b'\frac{x_0}{2} + a'\frac{y_0}{2} - \frac{a'b'}{2} = 0,$$

on obtient $$b'\left(x - \frac{x_0}{2}\right) + a'\left(y - \frac{y_0}{2}\right) = \mathrm{P};$$

puis, par analogie,

$$b''\left(x - \frac{x_0}{2}\right) + a''\left(y - \frac{y_0}{2}\right) = \mathrm{P}.$$

Multipliant et tenant compte des valeurs (6) et (7), on obtient :

(8) $$\mathrm{P}y_0\left(x - \frac{x_0}{2}\right) + \mathrm{P}x_0\left(y - \frac{y_0}{2}\right) + (a'b'' + b'a'')\left(x - \frac{x_0}{2}\right)\left(y - \frac{y_0}{2}\right) = \mathrm{P}^2.$$

Enfin l'identité

$$(a'b'' - b'a'')^2 = (a'b'' + b'a'')^2 - 4a'a''b'b'',$$

fait connaître la valeur (9) de $a'b'' - b'a''$.

Élevant au carré l'équation (3), et y portant les valeurs (6) (7) (8) (9), on a l'équation du lieu ; savoir :

$$\left[\left(x - \frac{x_0}{2}\right)(x_0 + y_0\cos\theta) + \left(y - \frac{y_0}{2}\right)(y_0 + x_0\cos\theta) - \mathrm{P}\cos\theta\right]^2$$
$$= \sin^2\theta\cot^2\omega\left[(\mathrm{P} - y_0x - x_0y + x_0y_0)^2 - 4x_0y_0\left(x - \frac{x_0}{2}\right)\left(y - \frac{y_0}{2}\right)\right].$$

Le genre de la conique dépend de la position du point P dans le plan. Celui-ci est divisé en régions par une quartique ayant pour directions asymptotiques doubles les directions isotropes et pour points doubles les trois sommets du triangle ABC. Cette courbe est donc limitée en tous sens, et l'on voit facilement que les points du plan, très éloignés, donnent des coniques du genre hyperbole.

Les points doubles pouvant être ordinaires ou isolés, la forme de la quartique est très variable.

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, la conique se réduit à une droite double, ayant pour équation :

$$(10) \quad x[x_0 + (y_0 - b)\cos\theta] + y[y_0 + (x_0 - a)\cos\theta] - \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\cos\theta - ab\cos\theta) = 0.$$

Si, au lieu du point P, on prenait un point P' ayant pour coordonnées x_1, y_1, on aurait l'équation d'une autre droite double.

Si les coniques déduites du point P sont les mêmes que celles qui sont déduites du point P', la droite double, lieu de leurs centres, doit être la même. Réciproquement, si la droite lieu des centres est la même, les deux familles de coniques coïncident; car il n'y a qu'une conique ayant pour centre un point donné, qui soit inscrite au triangle ABC.

Cela dit, en identifiant l'équation (10) avec l'équation analogue qui correspond au point P', on a :

$$\frac{x_0 + (y_0 - b)\cos\theta}{x_1 + (y_1 - b)\cos\theta} = \frac{y_0 + (x_0 - a)\cos\theta}{y_1 + (x_1 - a)\cos\theta}$$

$$(A) \qquad = \frac{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\cos\theta - ab\cos\theta}{x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - ab\cos\theta}$$

Ces deux équations en x_1 et y_1 donnent deux solutions. Mais, l'une d'elles étant évidemment

$$x_1 = x_0 \qquad y_1 = y_0,$$

il en reste une autre, qui correspond au point P' de l'énoncé.

Pour trouver cette solution, désignons par $\frac{1}{u}$ la valeur commune des rapports (A). On a

$$\frac{1}{u} = \frac{x_0 \sin^2\theta - b\cos\theta + a\cos^2\theta}{x_1 \sin^2\theta - b\cos\theta + a\cos^2\theta} = \frac{y_0 \sin^2\theta - a\cos\theta + b\cos^2\theta}{y_1 \sin^2\theta - a\cos\theta + b\cos^2\theta};$$

puis

$$(11) \qquad \begin{cases} x_1 = ux_0 - (u-1)\alpha, \\ y_1 = uy_0 - (u-1)\beta, \end{cases}$$

en posant, pour abréger :

$$(b - a\cos\theta)\cos\theta = \alpha \sin^2\theta,$$
$$(a - b\cos\theta)\cos\theta = \beta \sin^2\theta.$$

Pour calculer u, portons les valeurs (11) dans l'équation :

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - ab\cos\theta = u(x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\cos\theta - ab\cos\theta).$$

Nous obtenons ainsi une équation du second degré en u :

$$Au^2 + Bu + C = 0,$$

laquelle admet la racine 1. Il en résulte que l'autre racine u_1 est $\frac{C}{A}$. On trouve, après calcul,

$$u_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - ab\cos\theta}{(x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 + 2(x_0-\alpha)(y_0-\beta)\cos\theta},$$

valeur qu'il faut porter dans les formules (11).

Remarquons maintenant que la droite PP' a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ u_1x_0 - (u_1-1)\alpha & u_1y_0 - (u_1-1)\beta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle passe donc par un point fixe I, de coordonnées α, β.

On a, d'autre part,

$$(12) \qquad \overline{IP}^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - ab\cos\theta}{u_1}.$$

Pour calculer IP', observons que l'on a

$$x_1 - \alpha = u_1x_0 - (u_1-1)\alpha - \alpha = u_1(x_0 - \alpha).$$

On a donc

$$(13) \qquad IP' = u_1 . IP.$$

Des égalités (12) et (13), on conclut :

$$IP \times IP' = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - ab\cos\theta.$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(CONCOURS DE 1890)

Composition de mécanique rationnelle.

On donne un tétraèdre non pesant OABC dans lequel l'angle trièdre O est trirectangle, et dont les arêtes OA, OB, OC ont respectivement pour longueurs, a, b, c.

1° Déterminer les axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie, c'est-à-dire de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G du tétraèdre, dans l'hypothèse suivante :

$$a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{1}, \quad c = \sqrt{3};$$

2° On imprime au tétraèdre une rotation initiale autour d'un diamètre GD de l'ellipsoïde central, et l'on propose d'étudier le mouvement de ce tétraèdre autour de son centre de gravité G. On déterminera sa position dans l'espace, à une époque quelconque.

Les composantes p_0, q_0, r_0 de la rotation initiale par rapport au grand axe, à l'axe moyen et au petit axe de l'ellipsoïde central d'inertie ont respectivement pour valeurs :

$$p_0 = \sqrt{6 + \sqrt{5}}, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = \sqrt{6 - \sqrt{5}}.$$

On rappelle que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être déterminé par les équations :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L;$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M;$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N;$$

$$p = \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt};$$

$$q = \sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt};$$

$$r = \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

Théorie.

Définir ce qu'on entend par un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Exposer la méthode d'intégration de Mayer.

Application.

Intégrer le système suivant :

$$x_1x_5p_1 + (3x_1x_4 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5)p_3 - (2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_4x_5 - 2x_5x_6)p_4$$
$$+ x_5^2p_5 - (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_4x_5 - 2x_5x_6)p_6 = 0;$$
$$x_2p_2 - x_3p_3 + 2(x_4 - x_6)p_4 + x_5p_5 + 3(x_1 - x_6)p_6 = 0.$$

où l'on a posé $p_i = \frac{df}{dx_i}$.

EXERCICE ÉCRIT

36. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et l'on considère les paraboles P, Q qui, dans ce système, correspondent aux équations

(P) $$y^2 - 2px = 0,$$
(Q) $$x^2 - 2qy = 0.$$

Une droite AB mobile, tangente à Q, rencontre P aux points A, B. Par A, on peut mener à Q une seconde tangente; cette droite, et la droite analogue menée par B, se coupent en C.

1° Trouver le lieu de C.

Ce lieu est la parabole P elle-même.

2° Démontrer que les hauteurs du triangle ABC enveloppent une développée de parabole.

3° Les normales aux points A, B, C concourent; trouver le lieu de ce point de concours.

Ce lieu est un diamètre de P.

4° Trouver le lieu décrit par l'orthocentre de ABC.

Ce lieu est encore une droite, parallèle à Ox.

5° Si l'on considère deux cordes AB, A'B' rectangulaires et les points correspondants C, C'; démontrer que CC' passe par un point fixe.

Notes sur l'exercice 35.

1° Lorsqu'on part de l'équation générale des coniques, mise sous la forme

(Γ) $$\theta(x\cos\varphi + y\sin\varphi + \lambda)^2 + \theta'(x\sin\varphi - y\cos\varphi + \mu)^2 = 1,$$

on vérifie facilement que les carrés des demi-axes sont

(A) $$a^2 = \frac{1}{\theta}, \quad b^2 = \frac{1}{\theta'},$$

et que les foyers réels sont déterminés par les équations

(1) $$x \sin \varphi - y \cos \varphi + \mu = 0,$$

(2) $$x \cos \varphi + y \sin \varphi + \lambda = \pm \sqrt{\frac{\theta' - \theta}{\theta\theta'}} = \pm c.$$

En exprimant que la conique (Γ) est tangente aux axes ox, oy on trouve les conditions :

(3) $$\theta \cos^2 \varphi + \theta' \sin^2 \varphi - \theta\theta' (\mu \cos \varphi - \lambda \sin \varphi)^2 = 0,$$

(4) $$\theta \sin^2 \varphi + \theta' \cos^2 \varphi - \theta\theta' (\mu \sin \varphi + \lambda \cos \varphi)^2 = 0.$$

L'élimination des paramètres λ, μ, φ entre (1), (2), (3), (4) donne, en tenant compte des relations (A),

$$\frac{(x^2 - b^2)^2}{x^2} + \frac{(y^2 - b^2)^2}{y^2} = 4c^2,$$

ou

(R) $$(4a^2 - x^2 - y^2)x^2y^2 = b^4(x^2 + y^2).$$

2° On arrive très simplement à ce résultat, en utilisant certaines propriétés géométriques de la figure proposée.

Soient x, y les coordonnées du foyer F ; x', y' celles de l'autre foyer réel. On a, d'abord,

$$xx' = yy' = b^2.$$

D'autre part, en joignant le centre de Γ à la projection de F sur ox, puis, en se rappelant que cette distance est égale à a, on trouve

$$(y + y')^2 + (x - x')^2 = 4a^2,$$

ou

$$\left(y + \frac{b^2}{y}\right)^2 + \left(x - \frac{b^2}{x}\right)^2 = 4a^2.$$

Cette équation est identique à celle que nous avons trouvée par le calcul.

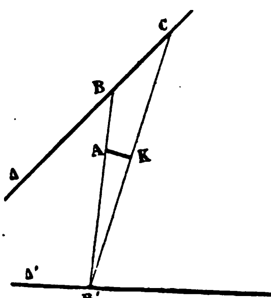
L'équation (R) donne lieu à une discussion très intéressante, que nous laissons à faire au lecteur. Les axes ox, oy, ainsi que les bissectrices, sont des axes de symétrie. La courbe est constituée par huit ovales égaux ; on déterminera la forme de l'un d'entre eux en cherchant les tangentes parallèles aux axes, les tangentes menées par l'origine et, enfin, les circonférencesconcentriques à l'origine, et tangentes à ces ovales.

QUESTIONS RÉSOLUES

1. — On donne deux droites fixes Δ, Δ'. Une droite mobile D rencontre constamment celles-ci. D'un point fixe A, on abaisse sur D une perpendiculaire DI. Quel est le lieu de I ?

A priori, y a-t-il un lieu ? Est-ce une courbe ou une surface ? Peut-on prévoir que le lieu passe par A ? Quel est le plan tangent en A ? Plans cycliques du lieu ?

La droite D rencontrant deux droites fixes, ses équations renferment deux paramètres variables λ, μ, sous forme linéaire. Le point I est déterminé par D et par le plan abaissé, de A, perpendiculairement à D. On voit ainsi, *a priori*, que le lieu est une SURFACE CUBIQUE UNICURSALE.



Le point A fait partie du lieu; il suffit, pour le reconnaître, de considérer la droite BC qui, passant par A, rencontre Δ et Δ′, aux points B, B′.

Considérons une droite B′C, passant par B′, et rencontrant Δ en un point C infiniment voisin de B. Si, de A, nous abaissons AK perpendiculaire sur B′C, K est un point du lieu. Dans le triangle B′AK, l'angle B′ est infiniment petit; K est un angle droit; donc la limite de B′AK est égale à un droit. La droite AK est tangente à la surface, à la limite; et, dans cette position limite, est perpendiculaire à BB′, dans le plan BB′Δ. On voit, de même, que la droite menée par A, perpendiculairement à BB′, dans le plan BB′Δ′, est tangente à la surface. En résumé, le plan tangent en A est perpendiculaire à BB′.

Considérons un plan fixe P passant par Δ′ et coupant Δ en un certain point D. Soit M un point du lieu, pris dans le plan P. L'angle DAM étant droit, le lieu de M est une circonférence, intersection de P avec la sphère décrite sur AD comme diamètre. Les plans passant par Δ′, et ceux qui passent par Δ, sont donc des plans cycliques.

On peut encore observer que le lieu considéré passe par les droites proposées Δ, Δ′. En effet, prenons sur Δ un point quelconque R, puis élevons, en R, un plan perpendiculaire à RA; ce plan coupe Δ′ en R′. En abaissant, de A, une perpendiculaire sur RR′, on obtient en R un point du lieu.

2. — On donne trois points A, B, C et un plan P. Construire un cylindre parabolique U passant par les points donnés, et admettant P comme plan de symétrie.

Supposons le problème résolu. Le plan ABC coupe U suivant une parabole Γ; P, suivant une certaine droite Δ, diamètre de Γ. La parabole Γ est donc déterminée par les points A, B, C et par un diamètre Δ. On peut considérer cette courbe comme formant la base du cylindre que nous voulons construire; mais il faut encore déterminer la direction des génératrices.

A cet effet, observons que Δ rencontre Γ en un point ω appartenant à la génératrice principale de U, droite qui est le lieu des sommets des sections droites de ce cylindre. En ω, le plan tangent s'obtient en menant, par la tangente à Γ, un plan perpendiculaire à P. Soit Q le plan ainsi déterminé. Finalement, les génératrices sont parallèles à la droite d'intersection des plans P, Q.

QUESTION 181

Solution par M. LEINEKUGEL, (*).

On considère une ellipse E; *par les foyers* F, F′ *on mène deux rayons vecteurs mobiles, parallèles, et dirigés dans le même sens. Ces droites rencontrent* E *aux points* A, A′; *par* A, *on trace une droite perpendiculaire à* FA′ *et rencontrant celle-ci au point* I. *Trouver le lieu décrit par ce point; distinguer les différentes formes affectées par les courbes, lieux de* I.

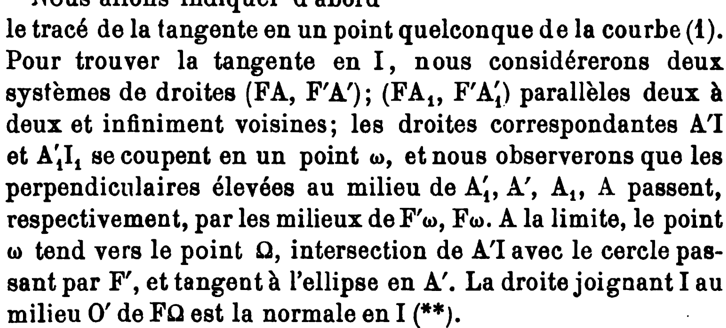
Soient ω l'angle polaire de FA, et f la projection de F sur F′A′. On a

$$FI = F'A' - F'f$$

$$= \frac{p}{1 + e \cos \omega} - 2c \cos \omega.$$

Donc

$$(1) \quad \rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega} - 2c \cos \omega.$$



Nous allons indiquer d'abord le tracé de la tangente en un point quelconque de la courbe (1). Pour trouver la tangente en I, nous considérerons deux systèmes de droites (FA, F′A′); (FA_1, $F'A'_1$) parallèles deux à deux et infiniment voisines; les droites correspondantes A′I et A'_1I_1 se coupent en un point ω, et nous observerons que les perpendiculaires élevées au milieu de A'_1, A′, A_1, A passent, respectivement, par les milieux de F′ω, Fω. A la limite, le point ω tend vers le point Ω, intersection de A′I avec le cercle passant par F′, et tangent à l'ellipse en A′. La droite joignant I au milieu O′ de FΩ est la normale en I (**).

Il est évident, *a priori*, que S, S′, σ, σ' sont quatre points du lieu. De plus, S, S′ sont deux sommets de la courbe, comme l'indique le tracé de la tangente. Nous distinguerons trois cas :

(*) Reçu quatrième à l'Ecole Polytechnique.

(**) La méthode des transversales réciproques s'applique aussi, très simplement, à la courbe en question. G. L.

1° $c > b$, on voit que le cercle (Δ) rencontre (E) en quatre points a, b, c, d lesquels, joints à F, donnent les quatre tangentes en ce point. La courbe affecte donc la forme de la *fig. I*;

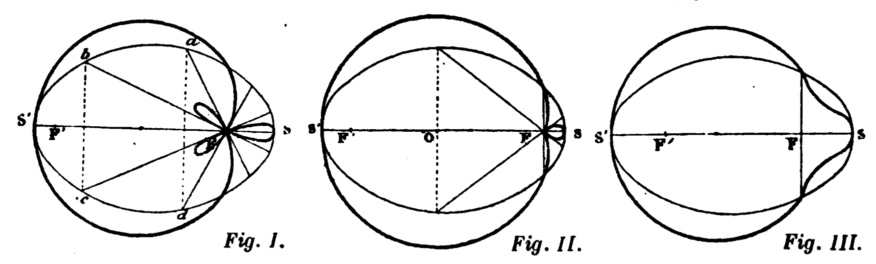


Fig. I. *Fig. II.* *Fig. III.*

2° $c = b$, les deux tangentes en F sont de rebroussement; (*fig. II*).

3° $c < b$, le point F est un point isolé (*fig. III*).

On pourrait considérer le cas où la conique est une hyperbole : les courbes sont alors un peu différentes des précédentes, car la courbe lieu des points I a des points, à l'infini, dans les mêmes conditions que l'hyperbole.

Nota. — Autre solution par M. Brocard.

QUESTION 194

Solution par M. J. Berthon, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

On considère une ellipse Γ. *Soient*, F *l'un de ses foyers*, Δ *la directrice correspondante*, C *le pied de la perpendiculaire abaissée de* F *sur* Δ. *Par un point* I, *on mène à* Γ *deux tangentes qui rencontrent* Δ *aux point* A *et* B.

1° *Trouver le lieu du point* I, *sachant que* C *est le milieu de* AB.

Ce lieu est la perpendiculaire élevée à FC, *au point* F.

2° *Trouver le lieu du point* I, *sachant que* AFB *est un angle droit.*

Ce lieu est une conique φ, *ayant pour foyer* F, *pour directrice* Δ, *et dont l'excentricité est égale à* $e\sqrt{2}$, e *désignant celle de* Γ.

3° *Trouver l'enveloppe de* φ, *quand on suppose que les ellipses* Γ *sont variables, mais restent homofocales.*

Cette enveloppe est un cercle.

4° Trouver l'enveloppe des coniques φ, quand on suppose que les ellipses Γ varient, mais en conservant sur FC les mêmes sommets.

Ce lieu est une quartique unicursale: on indiquera les trois points doubles de cette courbe. (G. L.)

1° Soit α, β un point du lieu : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes : l'équation du système des tangentes menées de ce point à l'ellipse est :

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

Faisons $x = \frac{a^2}{c}$, et écrivons que les deux valeurs de y, ainsi obtenues, sont égales et de signes contraires :

$$\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{\alpha^2 - a^2}{a^2} - \frac{2\beta y(\alpha - c)}{b^2 c} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{c^2} + \frac{2\alpha}{c} - \frac{\alpha^2}{a^2} = 0,$$

on a $\alpha - c = 0$, ou $\beta = 0$.

Le lieu est donc le système des droites représentées par $\alpha = c$, $\beta = 0$.

2° Si nous exprimons que les coefficients angulaires m et m' des tangentes satisfont à la condition $mm' + 1 = 0$, coefficients pris sur l'équation du système des tangentes, nous avons l'équation du lieu :

$$(a^2 - 2c^2)x^2 + a^2y^2 + 2a^2cx + a^2(c^2 - 2a^2) = 0.$$

Ce lieu est une ellipse ayant même foyer, même directrice que l'ellipse Γ, et dont l'excentricité est $e\sqrt{2}$, e désignant celle de Γ.

3° Pour trouver l'enveloppe de φ, quand les ellipses Γ varient en restant homofocales, il suffit d'écrire l'équation de φ sous la forme :

$$2a^4 - a^2(x^2 + y^2 + 2cx + c^2) + 2c^2x^2 = 0,$$

et d'exprimer que l'équation en a, a deux racines égales. On trouve ainsi

$$(x^2 + y^2 + 2cx + c^2)^2 - 16c^2x^2 = 0,$$

puis $x^2 + y^2 + 6cx + c^2 = 0$, $(x - c)^2 + y^2 = 0$.

Le lieu est un cercle ayant son centre sur ox au point d'abscisse $-3c$. Le rayon est égal à $c\sqrt{8}$.

4° Écrivons, de même, l'équation des coniques φ sous la forme

$$c^2(2x^2 - a^2) - 2a^2cx - a^2(x^2 + y^2 - 2a^2) = 0.$$

En exprimant que cette équation a ses racines égales, nous trouvons

$$y^2 = \frac{2(x^2 - a^2)^2}{a^2 - 2x^2}.$$

Ce nouveau lieu est une quartique unicursale, car les points $(y = 0, x = \pm a)$ sont deux points doubles isolés; de plus, cette courbe a un point double à l'infini, sur oy. Pour trouver le paramètre variable en fonction duquel s'expriment rationnellement x et y, posons

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \varphi,$$

ce qui est possible, car $a^2 - 2x^2$ est positif. Nous avons alors

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\cos^2 \varphi - 2}{\sin \varphi}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer, dans les formules, $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ par les fonctions connues :

$$\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. A. Troille, lycée de Grenoble Lévy, lycée de Nancy ; Roux, lycée de Grenoble; Étienne Pascot, lycée de Montpellier.

QUESTION 196

Solution par M. G. Leinekugel.

Circonscrire à une ellipse un quadrilatère ou un triangle inscrit à un cercle concentrique. Faire voir que le problème est impossible ou indéterminé, et chercher la valeur du rayon pour laquelle il est indéterminé.

Mêmes problèmes quand le centre du cercle est confondu avec l'un des foyers.

Nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante

pour qu'on puisse inscrire à une conique S′ un quadrilatère circonscrit à S.

Considérons les coniques représentées par

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$S' = x^2 - a^2 + K(y^2 - b^2) = 0,$$

admettant un parallélogramme inscrit à S′ et circonscrit à S. Formons l'équation en λ de ces deux coniques :

$$(\lambda_1 + a^2 + Kb^2)(\lambda_2 + a^2)(\lambda_3 + b^2K) = 0.$$

Elle montre que

(1) $$\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3.$$

Telle est la condition *nécessaire* pour qu'on puisse inscrire dans deux coniques concentriques un parallélogramme inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre.

Je dis que la condition *est suffisante;* soient en effet les équations

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$S' = Ax^2 + Ay^2 - 1 = 0,$$

d'où résulte

$$(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + Aa^2)$$
$$(\lambda_3 + Bb^2) = 0.$$

Comme on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3,$$

on a donc

$$Aa^2 + Bb^2 = 1.$$

Cette égalité exprime que S′ passe par les quatre points : $(a, \quad b)$, $(-a, -b)$, $(a, -b)$, $(-a, \quad b)$.

En résumé, la condition (1) est donc nécessaire et suffisante.

Cette démonstration est tout à fait générale; car, si l'on effectue une transformation homographique, la relation entre les racines de l'équation en λ, des deux coniques, restera la même, ces racines étant des invariants.

Par la transformation homographique, les deux coniques deviennent quelconques; de plus, le parallélogramme devient un quadrilatère quelconque.

Quant à la condition pour qu'on puisse inscrire, à une conique S', un triangle circonscrit à S, condition bien connue (*), elle est

$$\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0.$$

Appliquons ces conditions à une ellipse et à une circonférence concentrique représentées, respectivement, par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - \rho^2 = 0;$$

L'équation en λ est

$$(\lambda + \rho^2)(\lambda + a^2)(\lambda + b^2) = 0,$$

la condition demandée est, par suite,

$$\rho^2 = a^2 + b^2.$$

On retrouve ainsi le cercle de Monge.

Si nous exprimons que les coefficients de l'équation en λ, relative aux deux coniques S, S', vérifient la relation

$$\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0,$$

nous trouvons

$$(a^2 + b^2 + \rho^2)^2 - 4[a^2b^2 + \rho^2(a^2 + b^2)] = 0,$$

ou

$$\rho = a \pm b.$$

Considérons maintenant le cas où le cercle S' a pour centre un des foyers de S.

$$S = \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$S' = x^2 + y^2 - \rho^2 = 0,$$

$$\lambda S + S' = x^2\left(\frac{\lambda}{a^2} + 1\right) + y^2\left(\frac{\lambda}{b^2} + 1\right) + \frac{2\lambda cx}{a^2} - \frac{\lambda b^2}{a^2} - \rho^2 = 0.$$

L'équation en λ est

$$(\lambda + b^2)[\lambda^2 + \lambda(\rho^2 + b^2) + a^2\rho^2] = 0;$$

ce qui donne en employant la relation

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3, \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = -b^2,$$

d'où

$$b^4 = (\rho^2 + b^2)^2 - 4a^2\rho^2,$$

$$\rho = \sqrt{2(a^2 + c^2)}.$$

Ce résultat fournit la solution de la question posée en 1885, au Concours d'admission à l'École normale supérieure.

(*) Salmon, *Traité des coniques.*

Si nous exprimons maintenant qu'il existe un triangle inscrit à S' et circonscrit à S, nous obtenons, après réduction

$$\rho = 2a.$$

Ce résultat pouvait se prévoir à priori. En effet, considérons une ellipse et le cercle directeur relatif à l'un des foyers. Je dis qu'il existe une infinité de triangles inscrits à ce cercle et et circonscrits à l'ellipse.

Il suffit de montrer qu'il en existe un; il y en aura, d'après une propriété connue, une infinité.

Prenons, comme sommet du triangle, l'un des points P_1 où l'axe focal rencontre le cercle directeur, de ce point menons les deux tangentes à l'ellipse qui rencontre le cercle en deux points P_2, P_3, symétriques par rapport à l'axe focal. Je dis que P_2P_3 est une tangente à l'ellipse.

Pour cela, il suffit de prouver que

$$FN.F'N = b^2.$$

La similitude des triangles

$$(P_2F\omega), (P_2F'N); \quad (P_2F'\omega'), (P_2NF),$$

donne

$$\frac{F\omega}{P_2F} = \frac{F'N}{P_2F'}, \quad \frac{F'\omega'}{P_2F'} = \frac{FN}{P_2F};$$

puis

$$b^2 = F\omega.F'\omega' = FN.F'N.$$

NOTA. — Autre solution par M. Roux, du lycée de Grenoble.

QUESTION 217

Solution par M. G. LEINEKUGEL.

Soient S *le sommet d'un cône droit,* O *le point où l'axe rencontre un plan quelconque* P. *Démontrer qu'il existe un rapport* λ, *constant, entre les distances des points* O *et* S *à une tangente quelconque de la section du cône par le plan* P.

Désignons par θ l'angle au sommet du cône.

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$ l'équation du plan P; α, β, γ, étant les cosinus directifs de la normale au plan.

Le sommet du cône étant pris pour origne, choisissons des axes rectangulaires, celui des z étant l'axe du cône.

L'équation du cône est :

$$x^2 + y^2 - m^2z^2 = 0,$$

en posant $m = \operatorname{tg} \theta.$

Les équations de la tangente en un point (x_0, y_0, z_0) de la section sont :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0,$$
$$x_0 x + y_0 y - z_0 z m^2 = 0.$$

Les projections de cette droite, sur les trois plans de coordonnées, sont représentées par les équations :

$$x(m^2\alpha z_0 + \gamma x_0) + y(m^2\beta z_0 + \gamma y_0) - pm^2 z_0 = 0,$$
$$y(\beta x_0 - \alpha y_0) + z(\gamma x_0 + m^2\alpha z_0) - px_0 = 0.$$
$$x(\alpha y_0 - \beta x_0) + z(\gamma y_0 + m^2\beta r_0) - py_0 = 0.$$

On a donc :

$$\lambda^2 = \frac{m^4 z_0^2 p^2 + \left[\frac{p}{\gamma}(\gamma x_0 + m^2\alpha z_0) - px_0\right]^2 + \left[\frac{p}{\gamma}(\gamma y_0 + m^2\beta z_0 - py_0\right]^2}{p^2(m^4 z_0^2 + x_0^2 + y_0^2)},$$

En simplifiant et en observant que :

$$x_0^2 + y_0^2 = m^2 x_0^2,$$

on trouve : $$\lambda^2 = \frac{m^2}{\gamma^2(1 + m^2)},$$

ou finalement $$\lambda = \frac{\sin \theta}{\gamma}.$$

NOTA — Autre solution par M. Delbourg à Agen.

QUESTION 219 (*)

Solution par M. L. DELBOURG, maître-répétiteur au Lycée d'Agen.

1° AOB *est un triangle isoscèle*; a'o' *est une droite mobile, constamment égale à* OA; *on demande le lieu du point* O'.

(*) Au lieu de reproduire l'énoncé, qui est un peu long (V. *Journal*. 1887, p. 94), nous indiquons, à mesure qu'elles se présentent dans cette solution, les questions diverses qui étaient posées dans l'énoncé 219.

Tirons BO′; cette droite rencontre AO au point C. Les triangles BO′m, Oma', d'une part; BOB, a'O′C, d'autre part, sont égaux. On a donc

$$OC = O'C.$$

Ainsi le lieu du point O′ est une strophoïde droite (ou oblique) suivant que l'angle BOA est droit (ou quelconque).

2° *Trouver l'enveloppe de* $a'o'$ (axes rectangulaires).

On suppose $Om + ma' = a.$

En posant $Oa' = at,$

on a $Om = \frac{a}{2}(1 + t^2), \qquad ma' = \frac{a}{2}(1 - t^2).$

L'équation de $a'm$ est donc

$$\frac{x}{at} + \frac{y}{\frac{a}{2}(1 - t^2)} = 1.$$

ou

(1) $$x(1 - t^2) + 2yt = at(1 - t^2).$$

En différentiant par rapport à t, on a

(2) $$-2tx + 2y = a - 3at^2.$$

L'élimination de t entre les équations (1) et (2) donnerait l'équation cartésienne de l'enveloppe; mais on peut résoudre ces équations par rapport à x et à y. On trouve

$$x = a\frac{2t^3}{1 + t^2},$$

$$y = \frac{a}{2}\frac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2}.$$

La courbe est une quartique unicursale se composant de deux branches paraboliques, tangentes à xx'.

L'axe oy est une tangente de rebroussement.

3° *On prend* $a'I = Om$. *Lieu de* I?

Le lieu de ce point I est la courbe précédente.

En effet, soient $y = IP$, $x = IQ$ les coordonnées du point I.

Les triangles mQI, mOa' donnent

$$\frac{x}{Oa'} = \frac{mI}{ma'}$$

ou bien $$\frac{x}{at} = \frac{ma' - \mathrm{O}m}{ma'} = \frac{\frac{a}{2}(1+t^2) - \frac{a}{2}(1-t^2)}{\frac{a}{2}(1+t^2)};$$

d'où $$x = \frac{at^3}{1+t^2}.$$

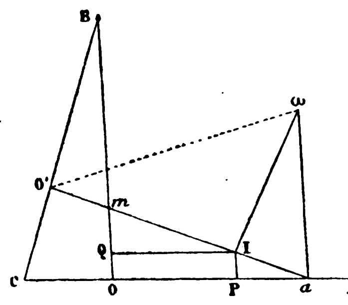
La similitude des triangles a'IP, $a'm$O donne, de même,

$$y = \frac{a}{2}\,\frac{(1-t^2)^2}{1+t^2}.$$

Le lieu du point I coïncide avec l'enveloppe de la droite $a'mo'$; le point I est donc le point de contact de la droite et de son enveloppe (*).

4° *Déduire, des résultats précédents, une description, par points et par normales, de la strophoïde droite.*

De ces diverses propriétés et du principe de Chasles, relatif au centre instantané de rotation, on déduit une nouvelle génération de la strophoïde droite, par points, et par normales.



Étant données deux droites rectangulaires, une droite a'O' de longueur constante glisse sur l'une d'elles de telle sorte que l'on ait $m\mathrm{O} = m\mathrm{O}'$; le lieu du point O' est une strophoïde droite S.

Ayant pris $a'\mathrm{I} = m\mathrm{O}'$, si l'on élève en I une perpendiculaire Iω à ma', elle rencontre la perpendiculaire à OX, au point a', en un point ω; ωO' est la normale à S, au point O'.

(*) Cette forme de raisonnement comporte une objection. Une droite mobile Δ enveloppe une courbe U, la touche en A et la rencontre en un autre point, B, par exemple. Le lieu décrit par B est la courbe U, mais la tangente en B n'est pas Δ. Pour que la conclusion visée soit rigoureuse, il faut montrer que la tangente en I coïncide avec $a'm$; c'est ce qui a lieu dans le cas présent, comme le prouve le calcul fait au paragraphe précédent.

G. L.

QUESTION 232

Solution par M. A. FAVERY, élève au Lycée de Montpellier.

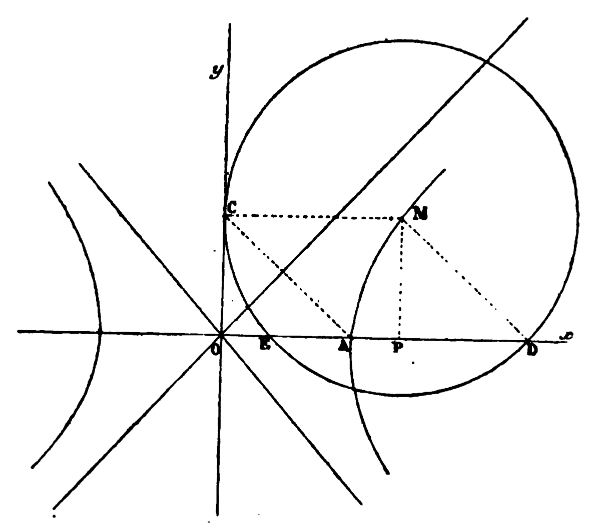
Les cercles tangents à l'axe non transverse d'une hyperbole équilatère, qui ont leur centre en un point M *pris sur la courbe, découpent, sur l'axe transverse, des segments égaux.*

(d'Ocagne.)

L'équation de l'hyperbole équilatère proposée est

$$x^2 = a^2 + y^2.$$

Abaissons MC perpendiculaire sur Oy. Nous avons AC=MC. En effet, OA $= a$, OC $= y$; donc AC $= x =$ MC $=$ MD.



Ainsi, les triangles rectangles OAC, PDM sont égaux. On a donc OA $=$ PD; par suite, le segment DE intercepté par le cercle sur l'axe des x est constant et égal à $2a$.

NOTA. — Solutions diverses par MM. G. Russo, à Catanzaro; Rezeau, conducteur des Ponts et Chaussées, à La Roche-sur-Yon; Etienne Pascot, du lycée de Montpellier; Thouzellier, du lycée de Montpellier; Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix; Galban, élève à l'école Polytechnique de Madrid; Leinekugel.

QUESTIONS PROPOSÉES

296. — Les définitions étant les mêmes que dans la question 293, montrer que, pour calculer A',... en fonction de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, on a les relations suivantes (dans les trois dernières, on connaît d'avance la somme des deux angles inconnus) :

$$(1) \qquad \cot A' = \cot A + \frac{c^2(\cot \mathfrak{Z} - \cot C)}{2S(\cot \mathfrak{Y} - \cot B)},$$

$$(2) \qquad \frac{\sin B''}{\sin C'} = \frac{b \sin \mathfrak{Z}}{c \sin \mathfrak{Y}} \ (*),$$

$$(3) \qquad \frac{\sin C''}{\sin B'} = \frac{c \sin (\mathfrak{Y} - B)}{b \sin (\mathfrak{Z} - C)}.$$

Nous rappelons, à ce propos, que $\frac{\sin A''}{\sin A'}$ a été donné dans la question 293.

(A. Poulain.)

297. — Trouver un plan sur lequel les sommets d'un tétraèdre donné se projettent suivant un groupe orthocentrique.

(J. Neuberg.)

NOTA. — Quatre points A, B, C, D, forment un groupe orthocentrique lorsque l'un quelconque d'entre eux est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.

(*) Cette formule donne le moyen le plus rapide de calculer l'angle de Brocard, ω. On en tire, en effet,

$$\frac{\sin (B - \omega)}{\sin \omega} = \frac{\sin^2 B}{\sin C \sin A}$$

ou

$$\cot \omega - \cot B = \cot A + \cot C.$$

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20304-9-90.

SUR UN THÉORÈME DE M. JAMET

Par M. **Balitrand**, élève à l'École Polytechnique.

Les courbes planes triangulaires sont des courbes qui, rapportées à un triangle de référence convenablement choisi, peuvent être représentées x, y, z, désignant les coordonnées normales d'un point de la courbe, par une équation de la forme :

$$(1) \qquad (px)^m + (qy)^m - (rz)^m = 0.$$

Le nombre m est l'exposant de la triangulaire, le triangle de référence est son triangle de symétrie. La Gournerie a, le premier, étudié ces courbes d'une façon systématique, en même temps que les surfaces réglées, tétraédrales symétriques, et les courbes gauches, tétraédrales symétriques (*). Dans sa Thèse (*Annales de l'École normale supérieure*, 1887) M. Jamet a énoncé, pour les courbes planes triangulaires, le théorème suivant, qui complète, d'une façon très heureuse, les recherches de La Gournerie sur ces courbes.

On considère une conique circonscrite au triangle de symétrie et touchant cette courbe en un point; le rapport des rayons de courbure de la conique et de la courbe est constant pour tous les points de celle-ci.

Ce théorème est susceptible d'une démonstration élémentaire, que nous allons donner.

1° Commençons par rappeler la formule (**) :

$$\rho = -(m-1)^2 \frac{R^2}{S^2} \frac{P^{\frac{3}{2}}}{H},$$

qui donne le rayon de courbure ρ d'une courbe de degré m, dont l'équation en coordonnées trilinéaires est $f(x, y, z) = 0$.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 5 juin et 17 juillet 1865, 8 janvier 1866.

Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques, avec des Notes par Arthur Cayley. Paris, Gauthier-Villars, 1867.

(**) Kœhler. — *Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure*, t. I, p. 338.

Dans cette formule, R et S désignent, respectivement, le rayon du cercle circonscrit et l'aire du triangle de référence; H est le hessien de $f(x, y, z)$. Enfin on a posé

$$P = f'^2_\alpha + f'^2_\beta + f'^2_\gamma - 2f'_\gamma f'_\beta \cos A - 2f'_\alpha f'_\gamma \cos B - 2f'_\beta f'_\alpha \cos C.$$

Cela posé, les coordonnées d'un point de la courbe (1) pourront s'exprimer, en fonction d'un paramètre variable t, par les formules :

$$(2) \qquad \begin{cases} px = (1 - t^2)^{\frac{2}{m}}, \\ qy = (2t)^{\frac{2}{m}}, \\ rz = (1 + t^2)^{\frac{2}{m}}. \end{cases}$$

L'équation d'une conique circonscrite au triangle de référence et passant par les points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) est :

$$\lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0;$$

en posant

$$\lambda = x_1x_2(z_1y_2 - y_1z_2),$$
$$\mu = y_1y_2(x_1z_2 - z_1x_2),$$
$$\nu = z_1z_2(y_1x_2 - x_1y_2).$$

En supposant que les points considérés soient infiniment voisins sur la courbe triangulaire, on a

$$x_2 = x_1 + \frac{dx_1}{dt}, \quad y_2 = y_1 + \frac{dy_1}{dt}, \quad z_2 = z_1 + \frac{dz_1}{dt};$$

puis

$$\lambda = x_1^2\left(z_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dz_1}{dt}\right),$$
$$\mu = y_1^2\left(x_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dx_1}{dt}\right),$$
$$\nu = z_1^2\left(y_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy_1}{dt}\right).$$

Soient maintenant

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

les équations de la courbe triangulaire et de la conique; nous avons

$$\varphi'_x = mp(px)^{m-1}, \qquad \varphi''_{xx} = m(m-1)p^2(px)^{m-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots;$$

et, par suite,

$$\varphi'_x = mp(1 - {}^2)^{\frac{2(m-1)}{m}}, \quad \varphi''_{xx} = m(m-1)p^2(1 - t^2)^{\frac{2(m-2)}{m}},$$

$$\varphi'_y = mq(2t)^{\frac{2(m-1)}{m}}, \qquad \varphi''_{yy} = m(m-1)q^2(2t)^{\frac{2(m-2)}{m}},$$

$$\varphi'_z = mr(1+t^2)^{\frac{2(m-1)}{m}}, \quad \varphi''_{zz} = m(m-1)r^2(1+t^2)^{\frac{2(m-2)}{m}}.$$

D'ailleurs, $\qquad \varphi''_{xy} = \varphi''_{xz} = \varphi''_{yz} = 0.$

Dès lors, les fonctions H et P sont

$$H = m^3(m-1)^3p^2q^2r^2(1-t^2)^{\frac{2(m-2)}{m}}(2t)^{\frac{2(m-2)}{m}}(1+t^2)^{\frac{2(m-2)}{m}},$$

$$\begin{aligned} P = {} & m^2p^2(1-t^2)^{\frac{4(m-1)}{m}} + m^2q^2(2t)^{\frac{4(m-1)}{m}} + m^2r^2(1+t^2)^{\frac{4(m-1)}{m}} \\ & - 2m^2qr(1+t^2)^{\frac{2(m-1)}{m}}(2t)^{\frac{2(m-1)}{m}} \cos A \\ & - 2m^2pr(1-t^2)^{\frac{2(m-1)}{m}}(1+t^2)^{\frac{2(m-1)}{m}} \cos B \\ & - 2m^2pq(1-t^2)^{\frac{2(m-1)}{m}}(2t)^{\frac{2(m-1)}{m}} \cos C. \end{aligned}$$

Pour la conique dont l'équation est $f(x,y,z) = 0$, on a :

$$f'_x = \mu z + \nu y = xyz\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

$$f'_y = \nu x + \lambda z = xyz\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),$$

$$f'_z = \lambda y + \mu x = xyz\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right);$$

puis :

$$f''_{xy} = \nu = z^2\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right),$$

$$f''_{xz} = \mu = y^2\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right),$$

$$f''_{yz} = \lambda = x^2\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right).$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs en t, puis $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{4t}{mp}(1-t^2)^{\frac{2-m}{m}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{mq}(2t)^{\frac{2-m}{m}},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4t}{mr}(1+t^2)^{\frac{2-m}{m}};$$

$$f'_x = -\frac{4}{mpq^2r^2}(1-t^2)^{\frac{2+m}{m}}(2t)^{\frac{4-m}{m}}(1+t^2)^{\frac{4-m}{m}}$$

$$f'_y = -\frac{4}{mp^2qr^2}(1-t^2)^{\frac{4-m}{m}}(2t)^{\frac{2+m}{m}}(1+t^2)^{\frac{4-m}{m}},$$

$$f'_z = \frac{4}{mp^2q^2r}(1-t^2)^{\frac{4-m}{m}}(2t)^{\frac{4-m}{m}}(1+t^2)^{\frac{2+m}{m}};$$

$$f''_{xy} = -\frac{4}{mpqr^2}(1-t^2)^{\frac{2-m}{m}}(2t)^{\frac{2-m}{m}}(1+t^2)^{\frac{4+m}{m}}.$$

. . . .

Ainsi, les fonctions H′ et P′ auront, pour la conique considérée, les valeurs suivantes :

$$H' = 2.\frac{4^3}{m^3p^4q^4r^4}(1-t^2)^{\frac{8-m}{m}}(2t)^{\frac{8-m}{m}}(1+t^2)^{\frac{8-m}{m}};$$

$$P' = \frac{4^2}{m^2p^2q^4r^4}(1-t^2)^{\frac{2(2+m)}{m}}(2t)^{\frac{2(4-m)}{m}}(1+t^2)^{\frac{2(4-m)}{m}} + \ldots;$$

$$-2\frac{4^2}{m^2p^4q^3r^3}(1-t^2)^{\frac{2(4-m)}{m}}(2t)^{\frac{6}{m}}(1+t^2)^{\frac{6}{m}}\cos A - \ldots$$

D'après cela, on voit qu'il existe entre les fontions P et P′ la relation :

$$P' = P.\frac{4^2}{m^4p^4q^4r^4}(1-t^2)^{\frac{2(4-m)}{m}}(2t)^{\frac{2(4-m)}{m}}(1+t^2)^{\frac{2(4-m)}{m}}.$$

Par suite, si l'on désigne par ρ et ρ' les rayons de courbure de la courbe triangulaire et de la conique, au point où elles se touchent, on a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{2}{m-1}.$$

Le théorème est donc démontré.

2. — Les courbes planes triangulaires comprennent, comme cas particulier, un grand nombre de courbes remarquables et bien connues. Nous citerons : les *coniques circonscrites, inscrites* ou *conjuguées* au triangle de référence. Elles correspondent, respectivement, à : $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$, $m = 2$. Les *cubiques unicursales* $\left(m = \frac{1}{3}\right)$; les *quartiques à trois points doubles d'inflexion* et parmi celle-ci : la *lemniscate* et la *kreuzcurve* $(m = \times 2)$; les *quartiques à trois points de rebroussement* $\left(m = -\frac{1}{2}\right)$; l'*hypocycloïde à quatre rebroussements* et la *déve-*

loppée de l'ellipse $\left(m = \frac{2}{3}\right)$. — Le théorème précédent ramène la construction du rayon de courbure en un point de l'une des courbes à ce problème : *étant donnés quatre points* A, B, C, M *d'une conique et la tangente au point* M, *construire le cercle osculateur à la conique*. Il doit exister beaucoup de solutions de ce problème ; la méthode suivante est peut-être nouvelle.

D'après le théorème de Joachimsthal, la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur, et la tangente au point M font des angles égaux avec les axes de l'ellipse. D'ailleurs, cette corde commune étant déterminée, le théorème de Pascal permet de construire son second point d'intersection avec la

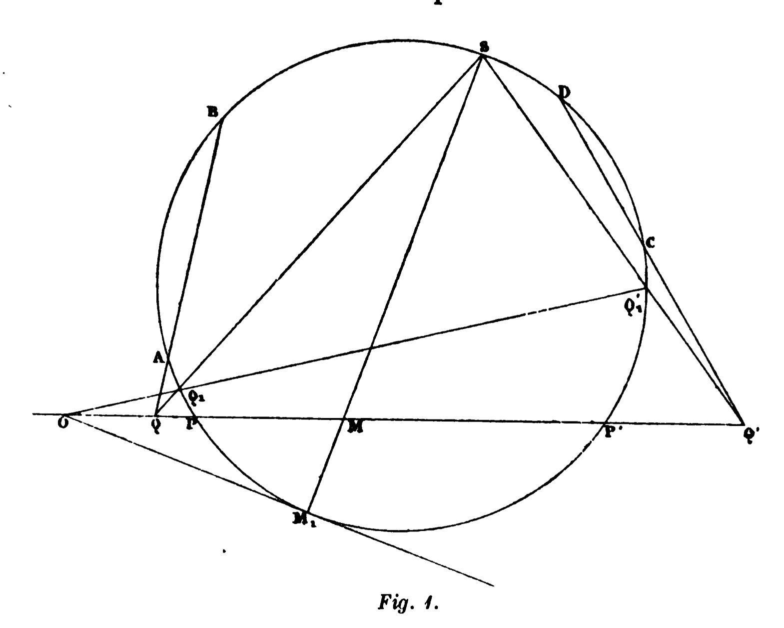


Fig. 1.

coniqne, point qui détermine complètement le cercle osculateur.

Le problème revient donc à trouver, dans les conditions posées, les directions des axes de l'ellipse. Pour cela, traçons la circonférence circonscrite au triangle ABC : elle coupe l'ellipse en un quatrième point D, et les axes sont parallèles

aux bissectrices des angles des droites AB, CD. Pour construire ce point D, nous observons que, d'après le théorème de Desargues, l'ellipse, le cercle et le couple de droites AB et CD déterminent, sur la tangente en M, une involution dont M est un point double. Les points de rencontre Q et Q′ de la tangente donnée avec les droites AB et CD sont deux points conjugués dans cette involution. Pour trouver Q′, nous emploierons la construction suivante : désignons par P et P′ les points d'intersection du cercle avec la tangente, et prenons un point arbitraire S sur le cercle. La droite SM coupe le cercle en un second point M_1; la tangente en M_1 au cercle rencontre PP′ en O. Traçons QS, cette droite rencontre le cercle en Q_1; menons la droite OQ_1, qui coupe le cercle en Q_1', la droite SQ_1' coupe PP′ en Q′; la droite CQ′ passe par le point cherché D.

3. — En terminant, nous signalerons une application de ce théorème aux quartiques ayant trois points doubles d'inflexion. On sait (Laguerre, *Nouvelles Annales, 1878*) qu'on appelle ainsi les courbes du quatrième ordre qui possèdent trois points doubles, les tangentes en ces points étant inflexionnelles. Si l'on prend le triangle des points doubles ABC, pour triangle de référence, l'équation générale de ces courbes est

$$\frac{p^2}{x^2} + \frac{q^2}{y^2} - \frac{r^2}{z^2} = 0. \tag{3}$$

On les déduit (*) de la conique Γ qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0, \tag{4}$$

par la construction suivante : la tangente à Γ, en un point M, coupe les côtés AC, AB en B′ et A′; les droites AA′, BB′ se coupent en un point M_1 qui décrit la courbe (3) lorsque M varie. La tangente au point M_1 s'obtient en prenant l'intersection de la tangente en M, à la conique (4), et de la droite conjuguée harmonique de CM_1 par rapport aux côtés CA, CB, et joignant

(*) Les quartiques en question sont des transformées de la conique par *points inverses*, si x, y, z sont des coordonnées normales; ou des transformées par *points réciproques*, si l'on considère des coordonnées barycentriques. G. L.

le point obtenu au point M_1. On sait ainsi construire ces courbes par points et tangentes; le théorème de M. Jamet permet de déterminer le rayon de courbure en chaque point.

Si l'on suppose que deux des points doubles coïncident avec les ombilics du plan, on obtient la *lemniscate*. La conique tangente à la lemniscate en un point M_1, circonscrite au triangle de référence, devient le cercle tangent en M_1 et passant par le point double; on peut ainsi déterminer très simplement le rayon de courbure de la lemniscate.

Si le triangle ABC, conjugué à la conique (4), est formé par la droite de l'infini et les axes de la conique, la courbe correspondante, du quatrième ordre, est la *kreuzcurve*. Elle a pour équation

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0,$$

a et b désignant les demi-axes de l'ellipse. La construction d'un point N et de la tangente en ce point, s'obtient immédiatement au moyen de la construction générale, convenablement modifiée (*). La conique circonscrite au triangle de

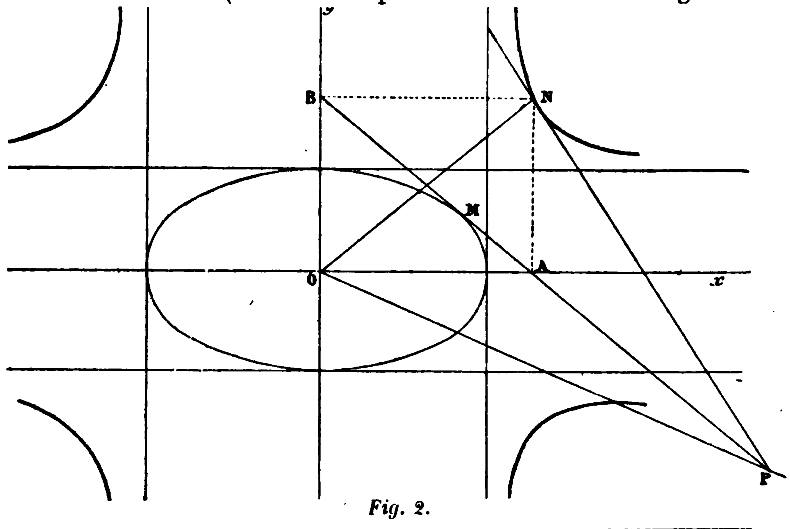


Fig. 2.

(*) La figure 2 représente la construction à laquelle nous faisons ici allusion. Par le point O, on a tracé une droite symétrique de OM, par rapport aux axes. Elle rencontre la tangente AB en un certain point P. PN est la tangente à la kreuzcurve.

référence et tangente en M_1 à la kreuzcurve, est l'hyperbole équilatère ayant pour équation

$$xy - bx \sin \varphi - ay \cos \varphi = 0,$$

φ désignant le paramètre angulaire du point M de la conique.

Les asymptotes s'obtiennent en menant, par le point M, des parallèles aux axes de l'ellipse. Cette propriété permet de trouver, par une construction simple, le rayon de courbure de la kreuzcurve. On sait, en effet, que dans l'hyperbole équilatère, le rayon de courbure est égal aux deux tiers du segment intercepté par la courbe sur la normale. La connaissance des asymptotes de l'hyperbole équilatère permet, comme on sait, de déterminer ce segment et, par suite, le rayon de courbure de la kreuzcurve.

EXERCICE ÉCRIT

37. — On considère une parabole P. Par un point I, on mène, à cette courbe, des tangentes qui la touchent aux points M, M', et qui rencontrent l'axe de P aux points A, A'.

1° Trouver le lieu de M, sachant que

(1) $$\overline{MA}^2 + \overline{M'A'}^2 = h^2.$$

Ce lieu est une quartique K.

2° Trouver le lieu du centre de la circonférence circonscrite au triangle formé par la tangente au sommet de la parabole P et par les tangentes issues d'un point I, mobile sur K.

Notes sur l'exercice 36.

1° Les équations des droites AB, BC, CA sont respectivement,

(1) $$x = my + \frac{q}{2m}, \ \dots \ (AB)$$

(2) $$x = m'y + \frac{q}{2m'}, \ \dots \ (BC)$$

(3) $$x = m''y + \frac{q}{2m''}. \ \dots \ (CA)$$

En exprimant que AB, BC se coupent en un point B, appartenant à la parabole P, on a

(4) $$\frac{q}{p} = 4mm'(m + m').$$

On trouve, de même,

(5) $$\frac{q}{p} = 4mm''(m + m'').$$

D'après les égalités (2), (3) les coordonnées x, y du point C sont:

(6) $$y = \frac{q}{2m'm''}, \quad x = \frac{q}{2} \cdot \frac{m' + m''}{m'm''}.$$

D'ailleurs, l'élimination de m, entre (4) et (5), donne:

(7) $$\frac{q}{p} = 4m'm''(m' + m'').$$

Des relations (6), (7) on déduit:

$$y^2 = 2px.$$

Le lieu de C est donc la parabole P.

2° Prenons la hauteur issue du point C; les résultats qui correspondent à cette droite s'appliqueront, d'après ce qui précède, aux deux autres hauteurs du triangle ABC considéré.

En observant que les paramètres m', m'' sont les racines de l'une et de l'autre des équations :

$$\mu^2 y - \mu x + \frac{q}{p} = 0,$$

$$4\mu^2 m + 4\mu m^2 - \frac{q}{2} = 0,$$

on a, pour les coordonnées x, y de C, les formules

$$x = 2pm^2, \qquad y = -2pm.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée, de C, sur AB, est donc

$$y + 2pm = -m(x - 2pm^2).$$

L'enveloppe de la droite correspondante est la courbe représentée par l'équation

$$27py^2 = 2(x + 2p)^3.$$

C'est la développée d'une parabole, etc.

3° L'équation du cercle ABC est

$$x^2 + y^2 - q\frac{y}{2} - x\left[2p(1 + m^2) + \frac{q}{2m}\right] = 0.$$

Il passe par le sommet commun aux paraboles P, Q (*) et peut, par conséquent, être considéré comme un cercle de Joachimsthal, par rapport à chacune de ces courbes.

En identifiant l'équation précédente avec celle du cercle de Joachimsthal qui correspond à un point donné x_0, y_0 (**), on trouve

$$y_0 = q.$$

Le lieu demandé est un diamètre de P.

4° Le lieu décrit par l'orthocentre de ABC est aussi un diamètre de Q. On sait en effet que le centre de gravité de ABC décrit l'axe ox. Le *théorème d'Euler* (***) et la remarque faite au paragraphe précédent prouvent

(*) Il passe aussi par le foyer de Q; propriété rendue évidente par le théorème de Steiner.

(**) Cette équation est

$$x^2 + y^2 - x(x_0 + p) - \frac{yy_0}{2} = 0,$$

Voyez C. M. S., t. II, p. 482.

(***) *Le centre* O *du cercle circonscrit, le centre de gravité* G, *l'orthocentre* H, *sont trois points en ligne droite; de plus,* HG = 2GO.

cette propriété qui est aussi la conséquence du *théorème de Steiner* (****), appliqué à la parabole P.

5° Si l'on considère deux cordes rectangulaires AB, A'B' et les points correspondants C, C', l'équation de CC' est

$$m^2y + m(x - 2p) - y = 0.$$

La droite CC' coupe donc Ox en un point fixe ($y = 0$, $x = 2p$). C'est ce qui résulte aussi du *théorème de Frégier*, en observant que OC est isoscélienne de AB et que, par conséquent, dans l'hypothèse que nous avons faite, OC, OC' sont rectangulaires.

BIBLIOGRAPHIE

Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, des élèves de ces écoles et des aspirants à la licence ès sciences mathématiques, par M. F. Frenet, ancien élève de l'École Normale, professeur honoraire de la Faculté des sciences de Lyon, 5e édition, augmentée d'un appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales par M. H. Laurent, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Cet important et très utile ouvrage est trop connu, et depuis trop longtemps, pour qu'il soit nécessaire d'en faire ici une analyse quelconque. Nous mettons seulement sous les yeux de nos lecteurs quelques extraits de la préface qui accompagne la 5e édition. Ils pourront ainsi se rendre compte des modifications que l'auteur a introduites dans celle-ci et qui font de son ouvrage un livre indispensable à tout étudiant en mathématiques.

« La première édition a paru en 1856; elle contenait 220 pages. Depuis cette époque lointaine, le cadre officiel s'étant plusieurs fois élargi, de nouveaux exercices ont dû progressivement s'introduire dans ce recueil... A chacun de ces remaniements l'auteur s'est constamment préoccupé d'accroître, par tous les moyens dont il disposait, l'utilité et l'intérêt de son œuvre...

» Conformément aux plus récentes modifications des programmes, l'édition actuelle fait une grande place aux questions qui regardent la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et celle des fonctions elliptiques...

» Enfin, cette édition est enrichie d'un appendice étendu renfermant de nombreux exercices du choix le plus heureux et singulièrement propres à élucider les théories délicates auxquelles ils se rattachent. »

(****) *L'orthocentre d'un triangle circonscrit à une parabole appartient à la directrice de cette courbe.*

QUESTION 195

Solution par M. G. LEINEKUGEL.

On considère des hyperboles équilatères H *qui ont pour centre un point fixe* O *et qui passent par un autre point. Trouver le lieu décrit par les sommets réels de* H.

Ce lieu est une lemniscate de Bernoulli.

On propose, après avoir reconnu ce fait par le calcul, de l'établir géométriquement, en prenant, pour base de cette démonstration, la proposition suivante :

Le produit des distances d'un foyer F *d'une hyperbole équilatère à deux points* A, A′ *de la courbe, diamétralement opposés, est égal à* $\left(\frac{AA'}{2}\right)^2$.

L'équation d'une hyperbole équilatère H, quand on prend pour axes la droite qui joint le centre au point fixe A et la perpendiculaire, est

$(OA = a)$ $$x^2 - y^2 + 2\lambda xy - a^2 = 0.$$

Un point sera sommet, si la tangente en ce point est perpendiculaire au diamètre du point de contact, ce qui s'exprime

par la condition $$\frac{x + \lambda y}{x} = \frac{\lambda x - y}{y};$$

l'élimination, de λ donne pour le lieu la lemniscate de Bernoulli,

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)\ (*).$$

Ce lieu a pour sommets les points A, A′ (A′ étant le symétrique de A par rapport à O).

Soient F, F′ les foyers d'une hyperbole équilatère, dont le centre est O, et A, A′ deux points diamétralement opposés. On a

$$\overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OF}^2,$$

$$(AF - AF')^2 = 2\,.\,\overline{OF}^2;$$

on a donc $$AF\,.\,AF' = \overline{OA}^2 = \left[\frac{AA'}{2}\right]^2,$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

et comme $A'F = AF'$,
on a, comme l'indique l'énoncé

$$AF \cdot A'F' = \left[\frac{AA'}{2}\right]^2.$$

Ainsi, les foyers de H décrivent une lemniscate de Bernoulli dont A, A' sont les foyers.

Sur chaque rayon, issu de O, on détermine le sommet par la relation

$$\frac{OS}{OF} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le lieu des sommets est donc une courbe homothétique au lieu des foyers; et, par suite, une lemniscate, admettant pour sommets les foyers de la première.

QUESTION 225

1.— *Soient* P_1 *et* P_2 *deux points fixes pris sur une parabole,* P *un point variable sur la même courbe. Les droites* PP_1 *et* PP_2*, coupent le diamètre conjugué de la corde* P_1P_2 *en des points qui sont symétriques par rapport au point où ce diamètre coupe la parabole.*

(d'Ocagne.)

Solution géométrique par M. Balitrand.

Soit P' le point où le diamètre considéré rencontre la parabole. Le rapport anharmonique du faisceau

$$P.(P_1P'P_2\infty)$$

est constant, lorsque P se déplace sur la conique. Pour en calculer la valeur, amenons le point P en P_1. La droite PP_1 devient la tangente en P_1, à la parabole. Cette tangente rencontre le diamètre considéré, en Q, pôle de P_1P_2, et le faisceau

$$P_1(QP'P_2\infty)$$

est évidemment harmonique.

Dès lors le faisceau

$$P.(P_1P'P_2\infty)$$

est aussi harmonique; et le diamètre considéré parallèle au rayon $P\infty$, est divisé en deux parties égales par les trois autres rayons.

Solution analytique, par M. Brocard.

Soit $$y^2 = 2px$$
l'équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Les ordonnées des points P_1, P_2 étant désignées par $\pm b$, l'équation de PP_1 sera

$$y - b = \frac{2p}{\beta + b}\left(x - \frac{b^2}{2p}\right),$$

et celle de PP_2 : $$y + b = \frac{2p}{\beta - b}\left(x - \frac{b^2}{2p}\right).$$

On en tire, pour $x = 0$,

$$x_1 = \frac{b\beta}{2p}, \qquad x_2 = -\frac{\beta b}{2p},$$

ce qui établit la propriété énoncée.

NOTA. — Solutions diverses par MM. Galbon, à Madrid; Rézeau, conducteur des Ponts et Chaussées à la Roche-sur-Yon; Etienne Pascot, lycée de Montpellier; Delbourg, maître répétiteur au lycée d'Agen; Leinekugel.

M. Jérémie nous a adressé une solution géométrique dans laquelle il utilise les propriétés homographiques de la figure.

QUESTION 226

Solution par M. L. REZEAU, conducteur des Ponts et Chaussées, à la Roche-sur-Yon.

On donne cinq points sur une droite. Celle-ci se déplace de manière que quatre de ces points décrivent les quatre faces d'un tétraèdre. Le cinquième point décrit une ellipse. (Mannheim.)

Lorsqu'un des quatre points se déplace sur la droite, cette ellipse varie. Prouver que le lieu de son centre est une autre ellipse et définir les éléments de cette dernière courbe. (Amigues.)

1. — Prenons trois des faces du tétraèdre comme plans de coordonnées.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

sera l'équation de la quatrième face P.

Soient (x_i, y_i, z_i) les coordonnées des points considérés $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$; $\rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ les distances de (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5) à (x_1, y_1, z_1).

Supposons que le point $x_1y_1z_1$ se meuve dans le plan yoz

—	$x_2y_2z_2$	—	zox
—	$x_3y_3z_3$	—	xoy
—	$x_4y_4z_4$	—	P

(1) $$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma} = \rho,$$

sont les équations de la droite mobile.

L'on a : $x_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_3 = 0,$

donc, d'après (1), $\beta\rho_2 + y_1 = 0, \quad \gamma\rho_3 + z_1 = 0,$

$$\frac{x_4}{a} + \frac{y_4}{b} + \frac{z_4}{c} - 1 = 0,$$

(2) $$\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}\right)\rho_4 + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c} - 1 = 0.$$

Si x, y, z sont les coordonnées du cinquième point, on a aussi :

(3) $$\begin{cases} x = \alpha\rho_5, & \alpha = \dfrac{x}{\rho_5}, \\ y = \beta(\rho_5 - \rho_2), & \beta = \dfrac{y}{\rho_5 - \rho_2}, \\ z = \gamma(\rho_5 - \rho)_3, & \gamma = \dfrac{z}{\rho_5 - \rho_3}. \end{cases}$$

Ces valeurs (3), substituées dans (2), donnent :

(P) $$\frac{x\rho_4}{a\rho_5} + \frac{y(\rho_4 - \rho_2)}{b(\rho_5 - \rho_2)} + \frac{z(\rho_4 - \rho_3)}{c(\rho_5 - \rho_3)} - 1 = 0.$$

Les paramètres directeurs vérifient d'ailleurs la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos\lambda + 2\gamma\alpha \cos\mu + 2\alpha\beta \cos\nu - 1 = 0.$$

De (3), on déduit :

(Q) $$\frac{x^2}{(\rho_5)^2} + \frac{y^2}{(\rho_5-\rho_2)^2} + \frac{z^2}{(\rho_5-\rho_3)^2} + \frac{2yz\cos\lambda}{(\rho_5-\rho_2)(\rho_5-\rho_3)} + \frac{2zx\cos\mu}{(\rho_5-\rho_3)\rho_5} + \frac{2xy\cos\nu}{\rho_5(\rho_5 - \rho_2)} - 1 = 0.$$

(P) et (Q) définissent le lieu du cinquième point.

2. *Nature du lieu.* — Le lieu est la section de la surface (Q) par le plan (P).

Or la surface (Q) est un ellipsoïde.

En effet, si l'on forme l'équation en S (en supposant que Q soit rapportée à un système de coordonnées rectangulaires) la règle de Descartes montre que les racines sont toutes de même signe. Dans ce système, la surface Q serait un ellipsoïde. On sait que ces conclusions restent applicables dans le système d'axes obliques choisi. Ainsi (Q) est un ellipsoïde. Il est réel; son centre est à l'origine.

Le lieu des points considérés est une *ellipse.*

3. — Lorsque ρ_4 varie, les sections elliptiques définies par (P) et (Q) varient. Leurs centres sont à l'intersection des plans (P) avec leurs diamètres conjugués par rapport à la surface (Q).

Si M désigne le premier membre do Q, les équations de ces diamètres sont :

$$(4)\qquad \frac{M'_x}{\dfrac{\rho_4}{a\rho_5}} = \frac{M'_y}{\dfrac{\rho_4-\rho_2}{b(\rho_5-\rho_2)}} = \frac{M'_z}{\dfrac{\rho_4-\rho_3}{c(\rho_5-\rho_3)}} = \lambda.$$

L'élimination de ρ_4 et λ, entre (P) et (4), donne le lieu des centres.

Multiplions, dans (4), le premier rapport par x, le deuxième par y, le troisième par z; et ajoutons :

$$\lambda = \frac{2M}{\dfrac{x\rho_4}{a\rho_5} + \dfrac{y(\rho_4-\rho_2)}{b(\rho_5-\rho_2)} + \dfrac{z(\rho_4-\rho_3)}{c(\rho_5-\rho_3)}}:$$

ou, d'après (P),

$$\lambda = 2M.$$

Alors (4) devient :

$$\frac{a\rho_5 M'_x}{\rho_4} = \frac{b(\rho_5-\rho_2)M'_y}{\rho_4-\rho_2} = \frac{c(\rho_5-\rho_3)M'_z}{\rho_4-\rho_3} = 2M.$$

En éliminant ρ_4 entre ces trois dernières équations, on trouve

$$(A)\qquad 2a\rho_5 M'_x - b(\rho_5-\rho_2)M'_y - c(\rho_5-\rho_3)M'_z = (\rho_2+\rho_3)M.$$

$$(B)\qquad a\rho_5(\rho_3-\rho_2)M'_x - b\rho_3(\rho_5-\rho_2)M'_y + c\rho_2(\rho_5-\rho_3)M'_z = 0.$$

Les égalités (A) et (B) définissent le lieu des centres des sections elliptiques considérées.

4. *Discussion du lieu.* — (A) représente une quadrique passant par l'origine. C'est un ellipsoïde, les termes du second degré contenus dans M, étant les mêmes que dans (Q). D'ailleurs (B) est l'équation d'un plan passant par l'origine. Le lieu des centres est donc une *ellipse*.

On obtiendrait les éléments de cette courbe en cherchant, par le procédé connu, les axes de la section de (A) par (B).

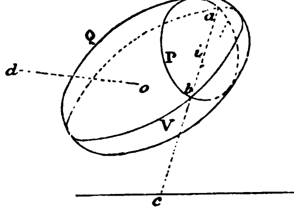
5. *Remarque.* — Le lieu précédent peut se trouver géométriquement.

Remarquons d'abord que d'après l'équation (P) les plans P, lorsque ρ_4 varie, passent par une même droite D.

$$\mathrm{D}\left\{\frac{x}{a\rho_5}+\frac{y}{b(\rho_5-\rho_2)}+\frac{z}{c(\rho_5-\rho_3)}=0,\quad \frac{y\rho_2}{b(\rho_5-\rho_2)}+\frac{z\rho_3}{c(\rho_5-\rho_3)}+1=0.\right.$$

Les centres des sections des plans passant par D sont dans le plan diamétral V, de la surface (Q), conjugué à la direction D

Si *ab* est l'intersection du plan diamétral V avec P, cette droite rencontre D en un point fixe *c*. Le centre *i* de la section P est le milieu de la sécante *ab* menée du point fixe *c*, dans la section V. On sait que le lieu des milieux de ces sécantes est une conique passant par le centre O de la conique V, par le point *c*, et par les points de contact des tangentes menées de *c* à la courbe V.



On peut observer que cette conique est la polaire arithmétique de *c*, par rapport à la conique V. — (*Journal*, 1888, p. 265.)

On peut d'ailleurs vérifier que (B) représente le plan diamétral conjugué, par rapport à la quadrique (Q), de la direction D.

Nous allons ajouter, aux résultats précédents, quelques remarques.

DÉMONSTRATION DE PROPRIÉTÉS DIVERSES

6. — *Lorsque le cinquième point se déplace sur la droite mobile, les centres des ellipses, lieux de ce cinquième point, sont en ligne droite.*

Les ellipses, lieux du cinquième point, sont définies par les équations (P) et (Q) trouvées plus haut.

On obtiendra le lieu des centres en cherchant le lieu des points d'intersection, avec (P), des diamètres conjugués à ce plan, dans la quadrique (Q).

Les équations (4), du diamètre conjugué, peuvent se mettre sous la forme :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{\rho_1} + \dfrac{y \cos \nu}{\rho_5 - \rho_2} + \dfrac{z \cos \mu}{\rho_5 - \rho_3} = \dfrac{\lambda \rho_4}{a}, \\[2mm] \dfrac{z \cos \nu}{\rho_5} + \dfrac{y}{\rho_5 - \rho_2} + \dfrac{z \cos \lambda}{\rho_5 - \rho_3} = \dfrac{\lambda(\rho_4 - \rho_2)}{b}, \\[2mm] \dfrac{x \cos \mu}{\rho_5} + \dfrac{y \cos \lambda}{\rho_5 - \rho_2} + \dfrac{z}{\rho_5 - \rho_3} = \dfrac{\lambda(\rho_4 - \rho_3)}{c}. \end{cases}$$

Éliminant ρ_5 et λ entre (P) et (5) on obtient l'équation du lieu.

De (5), on tire :

$$(6)\qquad \frac{x}{\rho_5} = \frac{\lambda \begin{vmatrix} \dfrac{\rho_4}{a} & \cos \nu & \cos \mu \\[2mm] \dfrac{\rho_4 - \rho_2}{b} & 1 & \cos \lambda \\[2mm] \dfrac{\rho_4 - \rho_3}{c} & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}};$$

ou, en égalant les déterminants du numérateur et du dénominateur à L et Ω :

$$(6)\qquad \frac{x}{\rho_5} = \frac{\lambda L}{\Omega}.$$

On a, de même,

$$(7)\qquad \frac{y}{\rho_5 - \rho_2} = \frac{\lambda M}{\Omega},$$

$$(8)\qquad \frac{z}{\rho_5 - \rho_3} = \frac{\lambda N}{\Omega}.$$

En remplaçant, dans (P), $\dfrac{x}{\rho_5}$, $\dfrac{y}{\rho_5 - \rho_2}$, $\dfrac{z}{\rho_5 - \rho_3}$ par les valeurs trouvées, on a :

$$\frac{\lambda}{\Omega}\left[\frac{L\rho_4}{a}+\frac{M(\rho_4-\rho_2)}{b}+\frac{N(\rho_4-\rho_3)}{c}\right]-1=0,$$

équation d'où l'on tire la valeur de λ.

Posons $\lambda = K$; (6) (7) et (8) deviennent :

$$\rho_5=\frac{\Omega x}{KL},\qquad \rho_5-\rho_2=\frac{\Omega y}{KM},\qquad \rho_5-\rho_3=\frac{\Omega z}{KN};$$

d'où

$$\text{(C)}\qquad \frac{\Omega x}{KL}-\frac{\Omega y}{KM}-\rho_2=0,$$

$$\text{(D)}\qquad \frac{\Omega x}{KL}-\frac{\Omega z}{KN}-\rho_3=0;$$

(C), (D) définissent le lieu. C'est une droite.

6. — *Dans son mouvement, la droite mobile reste constamment parallèle aux génératrices d'un cône de révolution.*

Il suffit de montrer que la droite représentée par $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ décrit un cône de révolution.

Dans la première partie, on a vu que :

$$\beta\rho_2+y_1=0,\qquad \text{d'où}\qquad y_1=-\beta\rho_2;$$
$$\gamma\rho_3+z_1=0,\qquad \text{d'où}\qquad z_1=-\gamma\rho_3.$$

On a donc

$$\text{(1)}\qquad \frac{\alpha\rho_4}{a}+\frac{\beta(\rho_4-\rho_2)}{b}+\frac{\gamma(\rho_4-\rho_3)}{c}-1=0.$$

D'ailleurs :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\cos\lambda+2\gamma\alpha\cos\mu+2\alpha\beta\cos\nu=1,$$

ou :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\cos\lambda+2\gamma\alpha\cos\mu+2\alpha\beta\cos\nu = \left[\frac{\alpha\rho_4}{a}+\frac{\beta(\rho_4-\rho_2)}{b}+\frac{\gamma(\rho_4-\rho_3)}{c}\right]^2.$$

Par suite, x, y, z, étant proportionnels à α, β, γ, on a

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu - \left[\frac{x\rho_4}{a}+\frac{y(\rho_4-\rho_2)}{b}+\frac{z(\rho_4-\rho_3)}{c}\right]^2=0.$$

Cette équation représente une quadrique qui a son centre à l'origine, sur la surface. C'est un cône. La forme de son équation montre, d'ailleurs, qu'il est de révolution.

QUESTION 228

Solution par M. l'abbé E. GELIN, professeur de mathématiques au Collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

Le lieu des foyers des paraboles, pour lesquelles un triangle donné ABC *est autopolaire, est un cercle (cercle des neuf points).*

Les directrices de ces paraboles passent par un point fixe (centre du cercle circonscrit) (*). (Poujade.)

1° Soient, en coordonnées rectangulaires, $A(o, y')$, $B(x'', o)$, $C(x''', o)$ les sommets du triangle donné, et soit

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (mx + ny + t)^2 = 0$$

ou

$$(1 - m^2)x^2 - 2mnxy + (1 - n^2)y^2 - 2(\alpha + mt)x - 2(\beta + nt)y + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0,$$

l'équation aux foyers des coniques pour lesquelles le triangle ABC est autopolaire.

Si l'on exprime que ces coniques sont des paraboles, on a la condition

(1) $$m^2 + n^2 = 1.$$

Si l'on identifie l'équation de la polaire du sommet $A(o,y')$:

$$-mnxy' + (1 - n^2)yy' - (\alpha + mt)x - (\beta + nt)(y + y') + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0,$$

avec l'équation du côté opposé BC,

$$y = 0,$$

on a les conditions

(2) $$-mny' - (\alpha + mt) = 0,$$

(3) $$-(\beta + nt)y' + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0,$$

De même, si l'on identifie l'équation de la polaire du sommet $B(x'', o)$:

$$(1 - m^2)xx'' - mnyx'' - (\alpha + mt)(x + x'') - (\beta + nt)y + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0,$$

avec l'équation du côté opposé AC,

$$\frac{x}{x''} + \frac{y}{y'} = 1,$$

(*) M. Poujade, qui a proposé cette question s'est aperçu, depuis, qu'elle se trouve traitée dans les *Exercices de M. Kœhler*, t. I, p. 194, et il nous a prié de signaler ce fait. (G. L.)

on a les conditions

(4) et (5) $$x'''[(1 - m^2)x'' - (\alpha + mt)]$$
$$= y'[- mnx' - (\beta + nt)] = - [-(\alpha + mt)x'' + \alpha^2 + \beta^2 - t^2].$$

Eliminant t entre (2) et (3), on a

(6) $$m^2(\alpha^2 + \beta^2 - \beta y') - mn\alpha y' - \alpha^2 = 0.$$

Eliminant ensuite n entre (1) et (6), on trouve

$$m^4(\alpha^2 + \beta^2)[\alpha^2 + (\beta - y')^2]$$
$$- m^2\alpha^2[(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 + (\beta - y')^2] + \alpha^4 = 0;$$

d'où : $m^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}$, et $m^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + (\beta - y')^2}$.

La solution $m^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ donne

(7)
$$m = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad n = - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad t = - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \beta y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'une des relations (4) ou (5), on obtient l'équation

$$\beta\left[2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha(x' + x''') - \beta\left(y' - \frac{x''x'''}{y'}\right)\right] = 0,$$

qui se dédouble dans les deux suivantes,

(8) $$\beta = 0,$$

(9) $$2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha(x' + x''') - \beta\left(y' - \frac{x''x'''}{y'}\right) = 0.$$

La solution $m^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + (\beta - y')^2}$ donne

$$m = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - y')^2}}, \quad n = \frac{\beta - y'}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - y')^2}},$$
$$t = - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - t^2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - y')^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'une des relations (4) ou (5), on obtient une équation qui se dédouble dans les deux suivantes :

(10) $$\frac{\alpha}{x''} + \frac{\beta}{y'} - 1 = 0,$$

(11) $$\frac{\alpha}{x'''} + \frac{\beta}{y'} - 1 = 0.$$

Les équations (8), (10) et (11) représentent les trois côtés du triangle ABC, et doivent être écartées. Il reste donc, pour le

lieu des foyers, l'équation (9), qui représente la circonférence des neuf points du triangle ABC.

2° Si, dans l'équation des directrices :

$$mx + ny + t = 0,$$

on remplace m, n, t par leurs valeurs données par les équations (7), on a $\alpha x - \beta y - (\alpha^2 + \beta^2 - \beta y') = 0,$

et si, dans cette dernière équation, on remplace $\alpha^2 + \beta^2$ par sa valeur tirée de l'équation (9), on trouve

$$\alpha(x'' + x''' - 2x) - \beta\left(y' + \frac{x''x'''}{y'}\right) - 2y) = 0,$$

équation générale des droites, qui passent par un point fixe.

$$\left[\frac{x'' + x'''}{2}, \frac{1}{2}\left(y' + \frac{x''x'''}{y'}\right)\right],$$

centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Nota. — Nous avons reçu, de M. Leinekugel, une solution géométrique et une solution analytique. M. Leinekugel relève ce fait intéressant mais très connu, croyons-nous, que *les polaires des milieux des côtés d'un triangle autopolaire à une parabole passent par le sommets de ce triangle.*

Nous avons reçu aussi une solution géométrique, de M. Balitrand.

QUESTION 229

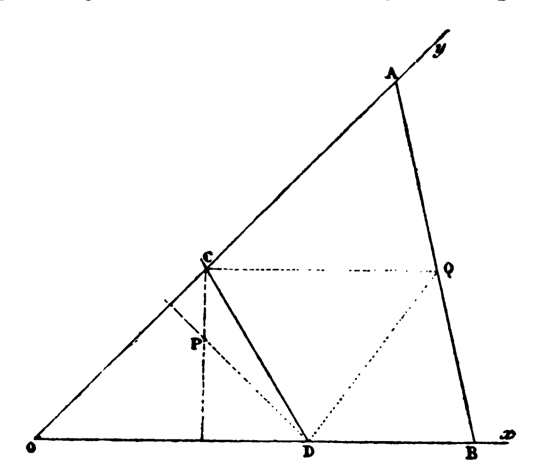
Solution, par M. J. Lhébrard, Lycée de Montpellier.

On considère les paraboles tangentes à deux droites données OX *et* OY, *en des points variables* A *et* B. *Si les directrices passent par un point fixe* P : *1° le lieu des foyers est un cercle: 2° la droite* AB *passe par un point fixe* Q. (Poujade.)

1° Menons, par P, des perpendiculaires aux droites OX, OY, rencontrant OY, OX respectivement aux points C, D. Le triangle COD est alors circonscrit à toutes les paraboles considérées (*). Le lieu des foyers de ces paraboles est donc le cercle circonscrit à COD.

(*) On invoque ici une réciproque du théorème de Steiner:
L'orthocentre d'un triangle circonscrit à une parabole appartient à la directrice de cette courbe.

2° Pour démontrer la seconde partie, il suffit de vérifier que les polaires du point O, par rapport à toutes ces paraboles, passent par un point fixe. Soient $ux + vy = 1$ l'équation de



la droite AB et $y = mx + n$ celle de la droite fixe CD. L'équation générale des paraboles tangentes aux axes, aux points A et B, est :

$$(ux - vy)^2 - 2(ux + vy) + 1 = 0.$$

La droite CD sera tangente à ces paraboles si l'on a :

$$m + nu - mnv = 0.$$

Cela montre que la droite AB passe par un point fixe Q, symétrique de O, par rapport au milieu de CD.

Remarque. — Dans les solutions qu'il nous adresse, M. Leinekugel démontre géométriquement la seconde partie, comme il suit :

Cette propriété, dit-il, résulte d'un théorème général que nous rappelons seulement : « *Etant donnée une conique bitangente à deux coniques fixes, les cordes de contact se coupent en un point qui est l'un des sommets du triangle autopolaire commun aux deux coniques fixes.* » Ici les deux coniques fixes sont OX, OY, CD et la droite de l'infini, elles admettent un seul système de sécantes communes, savoir les deux parallèles aux axes menées

par les points C et D. Ces deux droites se coupent en un point Q, par où passe la droite AB (*).

NOTA. — Solutions diverses par MM. Georges Bernache Assolant, du ycée Condorcet; L. Rezeau, conducteur des Ponts et Chaussées à la Roche-sur-Yon; Clapier, du lycée de Montpellier; l'abbé Gelin, professeur de mathématiques supérieures au Collège de Saint-Quirin (Huy).

QUESTIONS PROPOSÉES

298. — Un déterminant de l'ordre n a pour éléments de la diagonale principale les nombres $a_1, a_2, \ldots a_n$; tous les autres éléments sont égaux à x. Démontrer que ce déterminant, égalé à zéro, représente une équation du degré n, ayant toutes ses racines réelles. *(G.L.)*

299. — On sait que toutes les valeurs de λ sont réelles lorsque l'une au moins des formes f ou φ est la somme de trois carrés, de même signe. On demande, dans ce cas, de *séparer* les trois racines de l'équation en λ. *(E. Amigues.)*

300. — f et φ étant deux formes quadratiques ternaires et à coefficients réels, si on égale à zéro le discriminant de la forme

$$f + \lambda\varphi,$$

on obtient l'équation $\quad R(\lambda) = 0.$

Démontrer *algébriquement* que les racines réelles de cette équation, qui donnent pour $f + \lambda\varphi$ une somme de deux carrés de même signe, sont nécessairement en nombre pair.

(E. Amigues.)

301. — Les coniques tangentes à une même hyperbole, et telles que pour chacune d'elles, les asymptotes de cette hyperbole forment un système de diamètres conjugués, sont des ellipses. Ces ellipses sont équivalentes. Elles interceptent, sur

(*) Sans avoir recours au théorème général, visé par M. Leinekugel, on pourrait, pour établir la propriété en question, utiliser simplement le théorème suivant, théorème classique, qu'on peut démontrer élémentairement, de diverses façons :

Lorsqu'une parabole P *touche aux points* A, B *les droites* OX, OY*; si* CD *est une tangente à* P *rencontrant* OX, OY *aux points* D, C*; les parallèles aux droites* OX, OY *menées par ces points* C, D *se coupent sur* AB. G. L.

deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole, des longueurs proportionnelles. — Démonstrations géométriques.

(A. Tissot.)

302. — Théorème $a, b, c, \ldots h$ étant des quantités quelconques, inégales, l'équation

$$y = \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \ldots + \frac{1}{a-h} + \frac{1}{a-x}}{[(a-b)(a-c)\ldots(a-x)]^2} + \frac{\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} + \ldots + \frac{1}{b-h} + \frac{1}{b-x}}{[(b-a)(b-c)\ldots(b-x)]^2}$$

$$+ \ldots + \frac{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + + \ldots + \frac{1}{x-h}}{[(x-a)(x-b)\ldots(x-h)]^2}$$

représente l'axe des abscisses (*).

(E. Catalan.)

303. — Soit
$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0,$$
l'équation d'une kreuzcurve.

La droite qui joint les projections A, B d'un point N de cette courbe, sur les axes, touche l'ellipse qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

en un point M. Démontrer que la parabole tangente aux axes, aux points où ils sont coupés par la tangente en N à la kreuzcurve, passe, au point M, tangentiellement à l'ellipse.

(Balitrand.)

304. — On considère une kreuzcurve et une ellipse ayant mêmes axes que la kreuzcurve et la touchant en un point M; demontrer que le rayon de courbure de la kreuzcurve, en M, est le tiers du rayon de courbure de l'ellipse, au même point.

(Balitrand.)

(*) *Académie de Belgique, Bulletins*, juin 1890.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22878-10-90.

PROBLÈMES SUR LE TRIANGLE

Par M. **Auguste Boutin.**

1. — *On considère, dans le plan du triangle* ABC, *un point* M *dont les coordonnées normales sont:* x′, y′, z′. *Sur les projetantes orthogonales de* M, *et dans le même sens, on porte les longueurs* MA′ = Kx′, MB′ = Ky′, MC′ = Kz′. *Déterminer* K *de manière que les droites* AA′, BB′, CC′, *soient concourantes. Déterminer les points* M, *tels que ces droites concourent, quel que soit* K. *Lieu du point de concours, quand* M *coïncide avec* O?

Les équations de AA′, BB′, CC′, sont respectivement:

$$\frac{z}{y} = \frac{z' + Kx' \cos B}{y' + Kx' \cos C},$$
$$\frac{y}{x} = \frac{y' + Kz' \cos A}{x' + Kz' \cos B},$$
$$\frac{x}{z} = \frac{x' + Ky' \cos C}{z' + Ky' \cos A};$$

d'où, pour déterminer K, l'équation

$$(z' + Kx' \cos B)(y' + Kz' \cos A)(x' + Ky' \cos C)$$
$$=(y'+Kx' \cos C)(x'+Kz' \cos B)(z'+Ky' \cos A),$$
$$K\Sigma x'(y'^2-z'^2) \cos B \cos C - \Sigma x'(y'^2-z'^2) \cos B = o.$$

Pour un point quelconque, la première partie du problème est toujours possible et l'est d'une seule manière.

Il y a impossibilité pour les points situés sur la courbe représentée par

$$\sum \frac{x}{\cos A}(y^2 - z^2) = o,$$

courbe qui est la *cubique des inverses, relative à l'orthocentre.*

Il y a enfin indétermination pour les points communs aux courbes correspondant aux équations

$$\sum \frac{x}{\cos A}(y^2 - z^2) = o, \quad \sum x \cos A(y^2 - z^2) = o.$$

Ces courbes sont les *cubiques des inverses relatives : l'une, à l'orthocentre ; l'autre, au centre du cercle circonscrit.*

Ces courbes ont neuf points communs : A, B, C, I, I′, I″, I‴, H, O (*).

Les points A, B, C, H ne donnent lieu à aucune remarque intéressante.

Les lieux des points d'intersection de AA′, BB′, CC′, quand M est en I, I′, I″, I‴ ont fait l'objet d'une Note : « *Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle* », que nous avons publiée dans ce Journal (année 1890, pp. 104, 124.)

En considérant le point O, on est conduit à un théorème nouveau, croyons-nous.

Les droites AA′, BB′, CC′, se coupent alors en un point $\mu(x, y, z)$:

$$(1) \quad \frac{x}{\cos A + K \cos B \cos C} = \frac{y}{\cos B + K \cos A \cos C} = \frac{z}{\cos C + K \cos A \cos B}.$$

D'après cela, le lieu de ces points μ, lorsque K varie, est la *droite d'Euler* OGH.

On sait que la transformée, par points inverses, de la droite d'Euler est l'*hyperbole de Jérabek*. Par conséquent les coordonnées d'un point de cette courbe sont données par les relations :

$$(1) \quad x(\cos A + K\cos B \cos C) = y(\cos B + K\cos A \cos C) = z(\cos C + K \cos A \cos B).$$

Ainsi, on peut considérer K comme un paramètre variable qui, une fois donné, définit, soit un point de OH, soit un point de l'hyperbole de Jérabek.

2. — Proposons-nous maintenant le problème suivant :

Une droite quelconque coupe la droite d'Euler en un point dont le paramètre est K, *et l'hyperbole de Jérabek en deux points dont les paramètres sont :* K_2, K_3. *Trouver la relation qui existe entre* K_1, K_2, K_3.

(*) I, I′, I″, I‴ sont les centres des circonférences tangentes aux côtés de ABC, H est l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit.

D'après les égalités (1), (2) cette relation est :

$$\begin{vmatrix} \cos A+K_1\cos B\cos C & \cos B+K_1\cos A\cos C & \cos C+K_1\cos A\cos B \\ \frac{1}{\cos A+K_2\cos B\cos C} & \frac{1}{\cos B+K_2\cos A\cos C} & \frac{1}{\cos C+K_2\cos A\cos B} \\ \frac{1}{\cos A+K_3\cos B\cos C} & \frac{1}{\cos B+K_3\cos A\cos C} & \frac{1}{\cos C+K_3\cos A\cos B} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on a

$$\Sigma \cos A(\cos^2 B - \cos^2 C)(\cos A + K_1 \cos B \cos C)$$
$$(\cos A + K_2 \cos B \cos C)(\cos A + K_3 \cos B \cos C) = 0.$$

En effectuant les calculs indiqués, les termes en K_1, K_2, K_3, $K_1 K_2$, $K_1 K_3$, $K_2 K_3$, disparaissent et il vient :

$$\Sigma \cos^4 A(\cos^2 B - \cos^2 C) + K_1K_2K_3 \cos A \cos B \cos C \Sigma \cos^2 B \cos^2 C$$
$$(\cos^2 B - \cos^2 C) = 0,$$

ou finalement,

$$1 + K_1K_2K_3 \cos A \cos B \cos C = 0.$$

1° Si, dans cette relation, on fait : $K_2K_3 = m^2$; on a la proposition suivante :

La droite qui joint deux points de l'hyperbole de Jérabek, dont les paramètres ont un produit constant, rencontre la droite d'Euler, en un point fixe P.

2° Si l'on suppose $K_1K_2 = m^2$, on peut dire :

La droite qui joint un point quelconque de la droite d'Euler à un point de l'hyperbole de Jérabek choisi de manière que le produit des paramètres soit constant, rencontre la courbe en un second point fixe P_2.

En supposant que m^2 désigne la même constante dans les deux cas, on voit que P_2 est l'inverse de P.

3. — Le problème précédent peut être généralisé ainsi :

On considère un point M *du plan d'un triangle; de ce point, sur des perpendiculaires aux côtés et dans un même sens, on porte des longueurs* $MA' = Kx_1$, $MB' = Ky_1$, $MC' = Kz_1$ (x', y', z') (x_1, y_1, z_1) *étant les coordonnées de* M *et d'un autre point* P *quelconque. Déterminer* K *de manière que les droites* AA', BB'. CC' *soient concourantes.*

Les équations des droites considérées sont

$$\frac{z}{y} = \frac{z' + Kx_1 \cos B}{y' + Kx_1 \cos C},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y' + Kz_1 \cos A}{x' + Kz_1 \cos B},$$

$$\frac{x}{z} = \frac{x' + Ky_1 \cos C}{z' + Ky_1 \cos A};$$

d'où, pour déterminer K, l'équation

$$(z' + Kx_1 \cos B)(y' + Kz_1 \cos A)(x' + Ky_1 \cos C)$$
$$= (y' + Kx_1 \cos C)(x' + Kz_1 \cos B)(z' + Ky_1 \cos A),$$

$$\Sigma x'y'(x_1 \cos B - y_1 \cos A) + K[\Sigma x'x_1 \cos A (z_1 \cos B - y_1 \cos C)] = 0.$$

Ainsi, le problème est, en général, possible et il n'admet qu'une solution.

Il est impossible, si les coordonnées des points M_1 ou P satisfont à la relation

(3) $$\Sigma x'x_1 \cos A(z_1 \cos B - y_1 \cos C) = 0,$$

laquelle exprime que M est un point de la droite HP_2 (P_2 inverse de) ou que P est sur une conique circonscrite au triangle passant O_1 et par le point M_2, inverse de M.

Enfin, il y a indétermination, quand P coïncide avec O. Alors, le lieu du point d'intersection des droites telles que AA', est MH; résultat que les considérations géométriques rendent évident; et quand M coïncide avec H, ce qui est manifeste *a piori*.

En dehors de ces différents cas, il y a indétermination quand M et P satisfont à la relation (3) et à la suivante

(4) $$\Sigma x'y'(x_1 \cos B - y_1 \cos A) = 0.$$

Si P est considéré comme fixe, (4) représente une hyperbole équilatère passant par P_2. Ainsi :

Soient M, M_2 *deux points inverses; si l'on porte sur les projetantes orthogonales de* M, *et dans un même sens, des longueurs* MA', MB', MC', *proportionnelles aux coordonnées normales de* M_2; *les droites* AA', BB', CC' *sont concourantes.*

Si M est considéré comme fixe, (4) représente la droite OM_2, qui coupe la conique (3) aux points O_1 M_2. On retombe ainsi sur la proposition précédente, qui est caractéristique des points inverses.

Cherchons, dans ce cas, le lieu des points d'intersection des droites telles que AA'. On trouve pour les coordonnées d'un point du lieu :

$$x(y'z' + K\cos A) = y(x'z' + K\cos B) = z(x'y' + K\cos C).$$

Le lieu cherché est donc l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC et passant par M.

Il en résulte qu'une hyperbole équilatère quelconque circonscrite au triangle peut être considérée d'une infinité de manières, comme le lieu géométrique du point de concours de trois droites concourantes passant par les sommets du triangle.

En voici un exemple :

Si du centre de gravité G *d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés et qu'on porte sur ces perpendiculaires, dans le même sens, des longueurs* GA', GB', GC', *proportionnelles à ces côtés, les droites* AA', BB', CC' *sont concourantes; le lieu de leur point de concours est l'hyperbole de Kiepert.*

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT

Par M. **Neuberg.**

1° Soient A_1, B_1, C_1 les projections de M sur BC, CA, AB; portons sur MA_1, MB_1, MC_1 les longueurs $MA' = K.MA_1$, $MB' = K.MB_1$, $MC' = K.MC_1$. Généralement, les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent deux à deux, en trois points distincts α_1, β_1, γ_1; de même, les droites AA', BB', CC' se coupent en trois points distincts α', β', γ'. Pour $K = 0$, le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ se réduit au point M; pour $K = \infty$, il se réduit à l'orthocentre H de ABC.

Lorsque K varie, les points A', B', C' décrivent trois divisions semblables δ_1, δ_2, δ_3; donc, les droites AA', BB', CC' sont des rayons homologues de trois faisceaux homographiques φ_1, φ_2, φ_3 et leurs intersections α', β', γ' parcourent trois coniques Δ_1, Δ_2, Δ_3 passant respectivement par les points

(B, C, M, α_1, H), (C, A, M, β_1, H), (A, B, M, γ_1, H).

Les courbes Δ_1, Δ_2 ont trois points communs C, M, H; donc, elles se coupent encore en un quatrième point D, tel que les droites AD, BD, CD se correspondent dans les trois fais-

ceaux φ_1, φ_2, φ_3, et rencontrent MA_1, MB_1, MC_1 en trois points homologues des divisions δ_1, δ_2, δ_3. D appartient également à Δ_3. Ce point peut se construire linéairement. (Voir *Cremona-Dewulf*, Géométrie projective, p. 177, probl. I.)

2° D peut se confondre avec M; les coniques Δ_1, Δ_2, Δ_3 se touchent alors au point M. Le lieu des points M, pour lesquels cette circonstance se présente, est la cubique des inverses du centre O du cercle ABC.

Les coniques Δ_1, Δ_2, Δ_3 peuvent se toucher en H; dans ce cas, D coïncide avec H. Le lieu des points M est alors la cubique des inverses de l'orthocentre H.

Lorsque le triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ se réduit à un point M_1, D est confondu avec M_1 et le point M se trouve sur la cubique des inverses du centre de gravité G de ABC (J. M. S., 1886, p. 169).

Le point M_1 décrit également une cubique.

3° Les coniques Δ_1, Δ_2 peuvent se confondre. Pour qu'il en soit ainsi, Δ_1 doit passer par A. Par suite, les droites BA, CA_2 rencontrent respectivement MB_1, en des points B_2, C satisfaisant à la proportion

$$\frac{MB_1}{MB_2} = \frac{MC_1}{MC_2}.$$

Les triangles MB_1C_2, MC_1B_2 étant semblables, la relation précédente exige $MB_1 = MC_1$. On en conclut que M est le centre d'un cercle touchant les trois côtés du triangle ABC.

4° La conique Δ_1 dégénère en un système de deux droites, lorsque la droite BC est son propre homologue dans les faisceaux φ_2, φ_3; ce qui exige que B_1C_1 soit parallèle à BC, ou que M soit sur la droite AO. Lorsque M est en O, les coniques Δ_1, Δ_2, Δ_3 se composent, chacune de la droite OH et d'un côté du triangle ABC.

5° La relation

$$K_1K_2K_3 = -\frac{1}{\cos A \cos B \cos C}$$

se trouve déjà dans un article sur l'hyperbole de Jérabek, que nous avons publié dans *Mathesis.*, 1888, p. 87.

EXERCICE 38 (*)

Etant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on prend, sur l'axe des x, un point fixe A, sur l'axe des y, un point fixe B, et l'on mène, par le point O, une parallèle à la droite AB. On considère un système de trois cercles assujettis à avoir même axe radical et à être tangents : le premier, en A, à l'axe des x; le second, en B, à l'axe des y, le troisième en O à la parallèle à AB.

Démontrer que l'axe radical des trois cercles passe par un point fixe.

Trouver le lieu des points communs à ces trois cercles: on indiquera quelle est, en général, la forme de cette courbe, et l'on examinera en particulier le cas où l'angle en A du triangle OAB est égal à $\frac{\pi}{6}$.

Notes sur l'exercice 37.

1° Soit M le point de contact d'une tangente Δ, à une parabole donnée P. La droite Δ rencontre l'axe de P en un certain point A. L'ordonnée de M est égale à $p \cot \alpha$ (th. de la sous-normale), α désignant l'angle de Δ avec l'axe de P. On a donc

$$p \cot \alpha = \text{MA} \sin \alpha.$$

Soit μ le coefficient angulaire de Δ; l'égalité précédente donne

$$\overline{\text{MA}}^2 = \frac{p^2}{\mu^2}\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right).$$

Cela posé, l'énoncé donne la relation

$$(1) \qquad h^2 = p^2\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4} + \frac{1}{\mu'^2} + \frac{1}{\mu'^4}\right),$$

μ, μ' représentant les coefficients angulaires des tangentes issues du point I(x, y) dont on cherche le lieu géométrique. Or, μ, μ' sont les racines de l'équation

$$m^2x - my + \frac{p}{2} = 0.$$

(*) Cet exercice n'est que la reproduction de l'une des questions proposées au dernier concours de l'Ecole Normale. Malgré son évidente simplicité nous croyons savoir qu'il n'a été traité convenablement que par un très petit nombre de candidats. Pour ce motif, nous le proposons à titre d'exercice écrit, et nous insérerons, dans le prochain numéro, la meilleure solution, parmi celles qui nous auront été envoyées. *G. L.*

Cette équation permet de calculer la fonction

$$\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\mu'^2}+\frac{1}{\mu^4}+\frac{1}{\mu'^4}$$

et l'on trouve, finalement, pour l'équation du lieu

$$16y^4 - 4py^2(8x - p) + p^2(8x^2 - 4px - h^2) = 0.$$

Cette équation, discutée, prouve que le lieu cherché est une quartique K formée de deux branches paraboliques.

2° En cherchant l'équation de la circonférence δ, circonscrite au triangle formé par la tangente au sommet de P et par les tangentes issues d'un point (x, y) de K, on trouve facilement

$$X^2 + Y^2 - \left(x+\frac{p}{2}\right)X - yY + p\frac{x}{2} = 0.$$

On voit alors que le point ω, centre de δ, est situé au milieu de la droite qui joint le foyer F, de P, au point considéré I. Le lieu de ω est donc une quartique K′, homothétique à K; F est le centre de l'homothétie, $\frac{1}{2}$ est le rapport d'homothétie des courbes K′, K; résultat que des considérations géométriques très simples rendent évident.

QUESTION 230

Solution par M. BALITRAND, du Lycée de Nîmes.

Démontrer que l'on a

$$1 + C_m^1 C_p^1 + C_m^2 C_p^2 + \ldots + C_m^m C_p^m = C_{p+m}^m$$

m *et* p *désignant deux entiers positifs tels que l'on ait* p $\geqslant$ m.

(Roux.)

On a :

$$(x + 1)^p = x^p + C_p^1 x^{p-1} + C_p^2 x^{p-2} + \ldots C_p^m x^{p-m} + \ldots C_p^p,$$
$$(x + 1)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + C_m^m.$$

Effectuons le produit. Le coefficient de x^p sera

$$C_m^m + C_p^1 C_m^{m-1} + C_p^2 C_m^{m-2} + \ldots C_p^m,$$

que l'on peut écrire

$$1 + C_p^1 C_m^1 + C_p^2 C_m^2 + \ldots + C_m^m C_p^m$$

D'autre part, le coefficient de x^p dans le développement de $(x + 1)^{p+m}$ est C_{m+p}^m. On déduit, de là, l'identité proposée.

REMARQUE. — M. l'abbé Gélin nous a fait observer, avec raison, que la formule en question est un cas particulier d'une formule donnée par lui (*Mathesis.*, tome VI, p. 177).

Imaginons $m + p$ lettres partagées en deux groupes, l'un de m lettres, l'autre de p lettres. Pour obtenir les combinai-

sons *simples* ou *complètes* des $m + p$ lettres n à n, on peut: 1° former les combinaisons des m lettres n à n; 2° former les combinaisons des m lettres $n - 1$ à $n - 1$ et les combinaisons des p lettres une à une, associer chacune de celles-ci à chacune de celles-là; 3° former les combinaisons des m lettres $n - 2$ à $n - 2$ et les combinaisons des p lettres deux à deux, puis associer chacune de celles-ci à chacune de celles-là; et ainsi de suite.

On a donc:

$$C_{m+p}^n = C_m^n + C_m^{n-1}C_p^1 + C_m^{n-2}C_p^2 + \dots + C_m^1.$$

Il est bien entendu que, dans le cas des combinaisons simples, n n'est supérieur ni à m ni à p.

Si l'on fait $n = m$, et si l'on observe que $C_m^k = C_m^{m-k}$, on a la formule proposée.

On trouve d'ailleurs cette formule dans une note de M. Catalan intitulée : *Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes* (1858). (*Mélanges mathématiques*, t. I).

NOTA. — Solutions analogues par MM. Leinekugel, du lycée Charlemagne; Rezeau, Conducteur des Ponts et Chaussées, à la Roche-sur-Yon; Lhébrard du lycée de Montpellier.

QUESTION 233

Solution par M. H. BROCARD.

Soit Γ *la courbe qui correspond à l'équation*

(1) $$\rho = a \tang \omega;$$

le rayon vecteur qui part de l'origine O *rencontre* Γ *en* A, *puis l'asymptote* Δ (*au bras correspondant à ce point* A) *en* B. *Traçons la perpendiculaire à* OB, *au point* B. *Cette droite coupe* Oy *en* C. *soit* D *la projection de* O *sur* Δ. *Démontrer que la tangente en* A *passe par le point* N (*autre que* D), *commun à la circonférence* DAB *et à la droite* DC. (G. L.)

De l'équation (1) on déduit

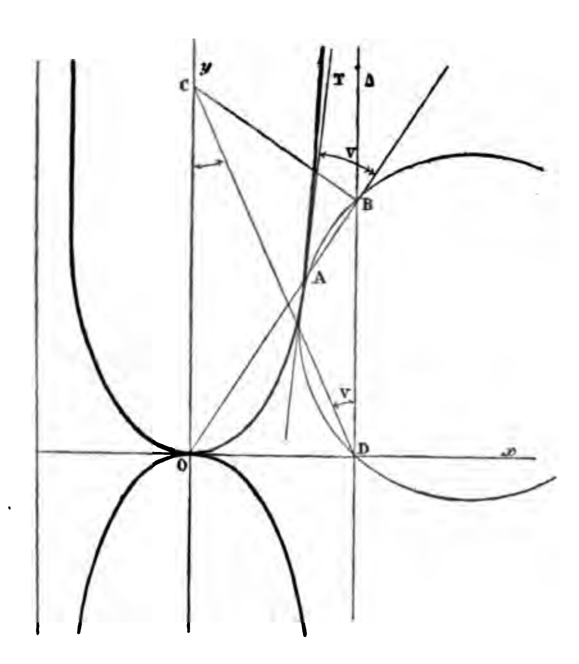
$$\tang V = \sin \omega \cos \omega,$$

V désignant l'angle aigu TAB formé par la tangente AT en A avec OAB.

On trouve facilement

$$OC = \frac{a}{\sin \omega \cos \omega};$$

donc $$V = TAB = OCN = NDB.$$



Le quadrilatère BAND est donc inscriptible à un cercle; ce qui établit la propriété en question (*).

Nota. — Solutions diverses par MM. I. Beyens et Rezeau.

(*) La courbe Γ a déjà occupé l'attention des géomètres depuis que les *Nouvelles Annales de Mathématiques* avaient proposé (Question 81, t. III, 1844) d'établir que cette courbe était égale à sa polaire par rapport à un cercle; mais, MM. Housel (t. XIII, 1854, p. 132 et 135) et Genocchi (*loc. cit.* et t. XIV, 1855, p. 248 et 254) ont montré l'iuexactitude de cette proposition.

Des questions analogues ont été également traitées par MM. Klein et Lie.

On trouvera aussi (*Journal,* 1887, p. 253) une note de l'auteur de la question 233, dans laquelle sont établies diverses constructions pour la tangente en un point de Γ.

QUESTION 236

Solution par M. Largier, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

D'un point M, *on peut mener à une parabole donnée trois normales, trouver le lieu du point pour lequel les pieds forment un triangle d'aire donnée.*

Soit
$$y^2 - 2px = 0,$$
l'équation de la parabole rapportée aux axes ordinaires. Considérons un point P (X, Y); puis, menons, de ce point, les normales à la parabole. Soient (x', y'), (x'', y''), (x''', x'''), les coordonnées respectives des pieds de ces normales. Si k^2 est la valeur de l'aire, on a

$$k^2 = \pm \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2p} \begin{vmatrix} 1 & y' & y'^2 \\ 1 & y'' & y''^2 \\ 1 & y''' & y'''^2 \end{vmatrix},$$

et, par conséquent,

$$k^2 = \pm \frac{1}{2p} [y' - y''][y'' - y'''][y''' - y'].$$

Les coordonnées des pieds des normales menées de XY satisfont à l'équation

$$y^3 + 2p(p - X)y - 2p^2Y = 0.$$

Le produit des racines de l'équation aux carrés des différences, répondant à cette équation, est

$$4[8p^3(p - X)^3] + 27.4p^4Y^2 = 0.$$

On a donc pour équation du lieu

$$k^4 = 8p(p - X)^3 + 27p^2Y^2.$$

La courbe correspondante est une cubique parabolique. Si $k = 0$, elle se confond avec la développée de la parabole, chose évidente *a priori*.

Nota. — Solutions diverses par MM. Balitrand, du lycée de Nîmes; Leinekugel, élève au lycée Charlemagne; Gilly, à Nîmes; L. Rezeau Al. Couvert, du lycée Condorcet.

QUESTION 239

Solution par M. Rezeau, Conducteur des Ponts et Chaussées à la Roche-sur-Yon.

Soit A *un point pris sur une ellipse* Γ, *de centre* O. *D'un point* M, *choisi sur la normale en* A, *on peut mener, à* Γ, *trois autres normales, dont les pieds appartiennent à un cercle* Δ, *dit cercle de Joachimsthal de centre* Ω. *Soient* N *le point de rencontre de* AM *avec le grand axe de* Γ, *et* P *la projection de* M *sur ce même axe. Démontrer que l'abscisse de* Ω *est égale à la moitié de* NP.

Déduire de cette remarque, et d'autres propriétés connues, la construction du cercle de Joachimsthal, qui correspond aux points M *et* A. (G. L.)

Soient $A(x', y')$; $M(x_1, y_1)$ les points donnés.

La normale en A, à l'ellipse, a pour équation:

$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2.$$

Cette droite passe par le point M : donc l'équation précédente équivaut à

$$\frac{a^2(x - x_1)}{x'} - \frac{b^2(y - y_1)}{y'} = 0.$$

Pour $y = 0$, $\quad NP = x_1 - x = \frac{b^2y_1x'}{a^2y'}.$

D'un autre côté, l'équation du cercle de Joachimsthal, correspondant aux points A, M est :

$$x'y'(x^2 + y^2) - \frac{b^2y_1x'^2}{a^2}x - \frac{a^2x_1y'^2}{b^2}y + \frac{b^4y_1x' - a^4x_1y'}{c^2} = 0.$$

L'abscisse du centre de Ω est :

$$\frac{1}{2}\frac{b^2y_1x'}{a^2y'},$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ NP.

Construction du cercle de Joachimsthal. — La même propriété existe pour l'ordonnée du centre de Ω; elle est égale

à $\frac{1}{2}$ N'Q (N' étant le point où AM coupe le petit axe de l'ellipse, et Q la projection de M sur ce même axe).

Les coordonnées du centre de Ω sont donc connues.

Le cercle de Joachimsthal, passant au symétrique de A, par rapport au centre de l'ellipse, est donc complètement déterminé.

NOTA. — Solutions analogues par MM. Louis Cazaly, étudiant à Toulouse; H. G. à Étampes.

QUESTION 240

Solution par M. L. CAZALY, étudiant à Toulouse.

Soient t *et* n *la tangente et la normale en un point* O *d'une conique,* P *le pôle de la normale* n, *d'une droite quelconque menée par* P. *Si la tangente en un point quelconque* M *de la conique, coupe la tangente* t *au point* T, *et que la perpendiculaire élevée en* O, *à* OM, *coupe la droite* d *au point* S; *la droite* ST *passe par un point fixe* H *de la normale* n.

Faisant coïncider le point M *avec le point diamétralement opposé au point* O, *on voit que le point* H *est le pied de la perpendiculaire abaissée sur* n, *du point où la droite* d *est coupée par la perpendiculaire élevée en* O, *au diamètre passant en ce point.*

COROLLAIRE. — *Soient* t *la tangente en un point* O *d'une conique,* P *le pôle de la normale correspondante,* δ *la perpendiculaire abaissée du point* P *sur le diamètre passant au point* O. *Si la tangente en un point* M *quelconque de la conique coupe la tangente* t *au point* T, *et que la perpendiculaire élevée en* O, *à* OM, *coupe la droite* δ *en* S, ST *est perpendiculaire à la tangente* t. (d'Ocagne.)

Je prends le point O pour origine, t pour axe des x et n pour axe Oy.

L'équation de la conique est alors : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0$.

Les coordonnées du point P sont : $\beta = 0, \quad \alpha = -\frac{e}{b}$.

L'équation de la droite d est donc : $y = m\left(x + \frac{e}{b}\right)$.

Soient x', y' les coordonnées d'un point quelconque M de la conique. OM a pour équation : $\frac{y}{y'} = \frac{x}{x'}$, l'équation de la perpendiculaire menée par O est : $\frac{y}{x'} + \frac{x}{y'} = 0$.

Les coordonnées du point S sont donc :

$$S \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-\, mey'}{b(x' + my')}, \\ \beta = \dfrac{mex'}{b(x' + my')}. \end{array} \right.$$

Celles du point T :

$$T \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \dfrac{-\, ey'}{ax' + by'}, \\ \beta' = 0. \end{array} \right.$$

On a
$$OH = \frac{\beta\alpha'}{\alpha' - \alpha}.$$

Remplaçant α, β, α' par leurs valeurs, il vient :

$$OH = \frac{me^2x'y'}{ex'y'(b - ma)} = \frac{me}{b - ma} = \text{constante}.$$

Si M est sur le diamètre passant par O, on voit que la tangente en M est parallèle à t, donc ST est perpendiculaire sur n ; car T est rejeté à l'infini.

Corollaire. — Si l'on choisit la droite d de telle sorte que $m = \frac{b}{a}$, ce qui se fait en lui donnant une direction perpendiculaire au diamètre passant en O, on a $OH = \infty$. Donc ST est parallèle à n, et, par conséquent, perpendiculaire à t.

Nota. — Solutions diverses par MM. Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun ; Henry Armet *(solution géométrique)*, lycée Saint-Louis ; L. Rezeau ; Leinekugel.

QUESTION 241

Solution par M. L. Rezeau.

Trouver le lieu du centre de gravité des points d'intersection d'une tangente variable à un cercle fixe avec les diagonales d'un hexagone régulier donné, inscrit à ce cercle. (d'Ocagne.)

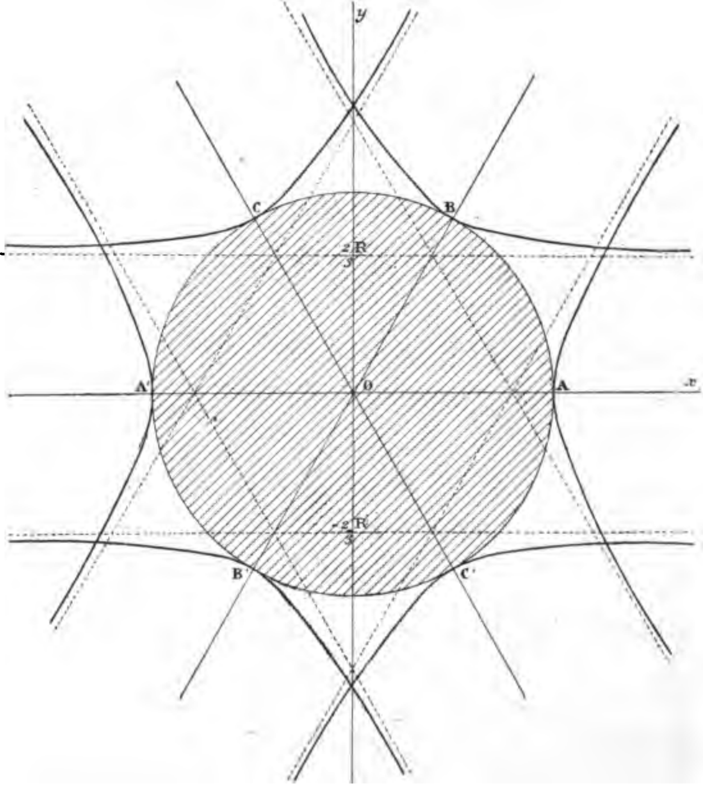
Rapportons le cercle circonscrit à l'hexagone à deux axes rectangulaires, ox correspondant à l'une des diagonales de l'hexagone considéré.

Dans ce système,

$$y = 0, \quad y - \sqrt{3}x = 0, \quad y + \sqrt{3}x = 0$$

sont les équations des diagonales de cet hexagone.

Soit
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0$$
l'équation d'une tangente quelconque au cercle.



Les abscisses des points d'intersection de cette tangente avec les diagonales sont, respectivement,

$$\frac{R}{\cos \alpha}, \quad \frac{R}{\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}, \quad \frac{R}{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha};$$

les ordonnées des mêmes points sont :

$$0, \quad \frac{R\sqrt{3}}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}, \quad \frac{-R\sqrt{3}}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}.$$

Par suite, les coordonnées (X, Y) du centre de gravité sont :

$$X = \frac{R}{3}\left[\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}\right],$$

$$Y = \frac{R}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}\right];$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \qquad X = \frac{R(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha)}$$

$$(2) \qquad Y = \frac{-2R\sin\alpha}{\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha}.$$

En éliminant α entre ces deux équations, on obtiendrait l'équation du lieu ; mais ces formules déterminent, suffisamment, la courbe cherchée ; c'est unė sextique unicursale, ayant la forme indiquée par la figure.

Nota. — Solution analogue par M. Leinekugel.

QUESTION 242

Solution par M. Leinekugel.

Construire la courbe Γ *qui correspond aux équations :*

$$(1) \qquad \frac{x}{a} = \frac{\cos t - \sin t}{e^t}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{\cos t + \sin t}{e^t},$$

dans lesquelles t *désigne un paramètre variable. Montrer que* Γ *est une spirale logarilhmique et vérifier que la développée de cette spirale est une courbe égale à* Γ. (G. L.)

Des formules proposées, nous déduisons

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{2}{e^{2t}}; \qquad \frac{y}{x} = \frac{1 + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t}.$$

D'où, en transformant en coordonnées polaires,

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} (45^\circ + t),$$

$$\rho = e_a^{-t}\sqrt{2}.$$

et, par suite, $$\rho = a\sqrt{2}e^{(45^\circ - \omega)}.$$

En faisant tourner l'axe polaire, de 45°, on a

$$\rho = a'e^{\Omega},$$

en posant, $$a' = a\sqrt{2}.$$

Ainsi Γ *est une spirale logarithmique.*

Nous allons montrer que la développée de Γ est une courbe égale à Γ.

L'équation d'une normale au point qui correspond à $\omega = \alpha$, est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a'e^{\alpha}} \cos (\Omega - \alpha) + \frac{1}{a'e} \sin (\Omega - \alpha),$$

ou $$\frac{a'e^{\alpha}}{\rho} = \cos (\Omega - \alpha) + \sin (\Omega - \alpha).$$

Pour obtenir l'enveloppe de cette droite, nous différentions, par rapport à α et nous obtenons

$$\frac{a'e^{\alpha}}{\rho} = \cos (\Omega - \alpha) - \sin (\Omega - \alpha).$$

Il reste à éliminer α. Deux combinaisons évidentes de ces équations donnent

$$\rho = a'e^{\omega}.$$

NOTA. — Autre solution par M. Clapier, étudiant à la Faculté des sciences de Montpellier.

QUESTION 245

Solution par M. REZEAU.

On considère deux axes ox, oy *et deux points* m(x, y), M(X, Y) *qui se correspondent de telle sorte que l'on ait*

(1) $$xX = a^2, \qquad yY = b^2.$$

Si m *décrit une courbe* U, *le point correspondant* M *décrit une autre courbe* V*; les tangentes à ces courbes, aux points* m, M *coupent les axes, respectivement, aux points* p, q, P, Q.

Démontrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{mp}}{\mathrm{mq}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}.$$

Déduire, de là, le tracé par points et par tangentes des courbes qui se correspondent dans la transformation réciproque cartésienne *que définissent les formules* (1).

Appliquer la propriété en question aux courbes représentées par l'équation

$$x^2y^2 = Ax^2 + By^2. \qquad \text{(G. L.)}$$

1. — Soient $m(x_1, y_1)$ et $M(X_1, Y_1)$ deux points qui se correspondent sur les courbes U et V.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation de la courbe U; $f\left(\frac{a^2}{X}, \frac{b^2}{Y}\right) = 0$ sera l'équation de la courbe V.

La tangente à U, en m, est représentée par

$$y - y_1 = -\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}}(x - x_1).$$

On voit facilement que

$$\frac{mp}{mq} = \frac{m_1p}{m_1O} = \frac{y_1\frac{df_1}{dy_1}}{x_1\frac{df_1}{dx_1}}.$$

D'autre part,
$$\frac{MP}{MQ} = \frac{M_1P}{M_1O} = \frac{Y_1\frac{df_1}{dY_1}}{X_1\frac{df_1}{dX_1}}.$$

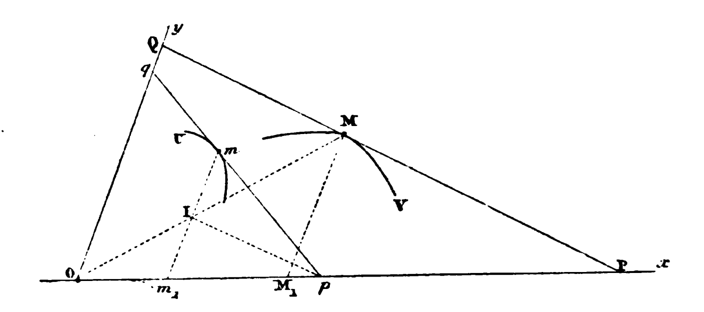
Mais
$$\frac{Y_1\frac{df_1}{dY_1}}{X_1\frac{df_1}{dX_1}} = \frac{Y_1\frac{df_1}{dy_1}\left(-\frac{b^2}{Y_1^2}\right)}{X_1\frac{df_1}{dx_1}\left(-\frac{a^2}{X_1^2}\right)} = \frac{y_1\frac{df_1}{dy_1}}{x_1\frac{df_1}{dx_1}}.$$

On a donc
$$\frac{mp}{mq} = \frac{MP}{MQ}.$$

2. — Le tracé de la tangente en A, à la courbe V, point qui correspond au point m, de la courbe U, se déduit du tracé de

la tangente à cette dernière courbe, au point m, comme nous allons le montrer.

Des formules (1), on déduit facilement la construction nécessaire pour obtenir m, connaissant M; et réciproquement.



D'autre part, soit pq la tangente en m, à la courbe U.

Le point P, où la tangente, en M, à V rencontre ox, étant tel que M

$$\frac{m_1p}{m_1o} = \frac{M_1P}{M_1O};$$

pour obtenir P il suffira de mener, par le point M, MP parallèle à IP, I étant le point d'intersection de OM avec mm_1.

3. — Soit à transformer, par la méthode précédente, la courbe représentée par l'équation

$$x^2y^2 = Ax^2 + By^2.$$

L'équation de la transformée est :

$$Bb^4 X^2 + Aa^4Y^2 - a^4b^4 = o.$$

Ces transformées sont donc des ellipses ou des hyperboles.

Comme on sait tracer géométriquement la tangente à ces courbes, la méthode précédente permet de tracer les tangentes aux courbes données, et, en particulier, à la *Kreuzcurve*, qui correspond à l'ellipse, dans cette méthode de transformation (*).

(*) Voyez plus loin, p. 288, un tracé de la tangente à la Kreuzcurve.

QUESTION 248

Solution par M. H. Brocard.

Du pôle S *d'une normale en* M *à une ellipse donnée on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre* OM *qui passe par ce point : cette droite rencontre en* P *ce diamètre; en* Q, *la normale en* M *à l'ellipse, et en* R *la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente en* M *à cette courbe. On demande les lieux décrits par* P, Q, R, *et l'enveloppe de la droite* PQR, *lorsque* M *parcourt l'ellipse donnée.* (Mannheim.)

1. — Soit φ l'anomalie excentrique d'un point M de l'ellipse. La normale en ce point $M(x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi)$ a pour équation

(1) $$by\cos\varphi - ax\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Identifiant cette équation avec celle de la polaire d'un point $S(\alpha, \beta)$

(2) $$a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0,$$

on trouve, pour coordonnées du pôle S de la corde MN :

$$\alpha = \frac{a^3}{c^2\cos\varphi}, \qquad \beta = -\frac{b^3}{c^2\sin\varphi}.$$

Ainsi, le lieu S est une *Kreuzcurve* correspondant à l'équation

(4) (S) $$a^6\beta^2 + b^6\alpha^2 = c^4\alpha^2\beta^2;$$

résultat bien connu. Cela posé, l'équation de OM est

(5) $$y = \frac{bx}{a}\operatorname{tang}\varphi,$$

et celle de la perpendiculaire SP,

(6) $$y + \frac{b^3}{c^2\sin\varphi} = -\frac{a}{b}\operatorname{cotg}\varphi\left(x - \frac{a^3}{c^2\sin\varphi}\right),$$

ou

(7) $$by\sin\varphi + ax\cos\varphi = a^2 + b^2.$$

On en conclut, pour la courbe (P), l'équation

(8) (P) $$\rho = \frac{a^2 + b^2}{ab} - \sqrt{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}.$$

La courbe correspondante est fermée, contrairement à ce que l'on pourrait supposer d'après les variations des coordonnées du point S lesquelles peuvent prendre des valeurs infinies.

De même,

2. — Le lieu des points Q aura pour équation le résultat de l'élimination de φ entre les équations (1) et (7), ou de tang $\varphi = t$ entre les deux équations

$$(Q) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (tax - by)^2(1 + t^2) - c^4t^2 = 0, \\ (tby + ax)^2 - (a^2 + b^2)^2(1 + t^2) = 0, \end{array} \right.$$

du quatrième et du deuxième degré.

3. — Le lieu du point R est plus simple à obtenir. En effet, on a, pour déterminer ce point, les équations (7) et

$$y = -\frac{bx}{a}\operatorname{cotg}\varphi,$$

Par conséquent, le lieu (R) a pour équation

$$(R) \qquad \rho = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}}{\sin\omega\cos\omega}.$$

4. — L'enveloppe de la droite SPQR est la podaire inverse de la courbe (P); mais l'équation (7) peut s'écrire

$$t^2(b^2y^2 - d^4) + 2abxyt + a^2x^2 - d^4 = 0,$$

avec

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

L'enveloppe de la droite SPQR est donc représentée par ($B^2 - 4AC = 0$),

$$a^2x^2 + b^2y^2 = d^4,$$

équation d'une ellipse, rapportée aux mêmes axes que la proposée.

Nota. — Solutions analogues par M. l'abbé H. Ropert, professeur à Guérande; E. Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun.

QUESTION 253

Solution (*).

Dans cette question, dont il est inutile, d'après la rédaction qui suit, de reproduire ici l'énoncé (V. *Journal* 1888, p. 216) on proposait, en résumé, l'étude d'une transformation des figures, transformation ainsi définie.

On donne deux droites sécantes ox, oy *et une courbe* U*; une tangente à la courbe* U, *au point* m *rencontre les droites données aux points* A, B. *Les parallèles menées par ces points, aux droites* ox, oy *se coupent en un certain point* M. *Ainsi, à* m *correspond* M; *à la courbe* U, *une autre courbe déterminée* V.

Soient x, y les coordonnées de m, la tangente en ce point, à U, a pour équation :

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Par suite, les coordonnées du point correspondant M sont :

$$(M) \qquad \left\{ \begin{aligned} Y &= y - x\frac{dy}{dx}, \\ X\frac{dy}{dx} &= x\frac{dy}{dx} - y. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient angulaire de la droite Mm est donc :

$$(1) \qquad \frac{Y - y}{X - x} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

Je dis que la tangente en M à V est conjuguée harmonique de Mm, par rapport aux directions MA, MB. Pour établir cette proposition, il faut montrer que son coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de Mm. Les formules (M)

(*) Nous n'avons reçu qu'une solution de cette question; mais elle renfermait plusieurs erreurs.

donnent :

$$dY = dy - xd.\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}.dx = -\ xd.\frac{dy}{dx},$$

$$dX\,\frac{dy}{dx} + Xd.\frac{dy}{dx} = xd.\frac{dy}{dx} + dx.\frac{dy}{dx} - dy = x - d.\frac{dy}{dx}.$$

On en déduit :

$$(2)\qquad \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{X - x} = -\ \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

La comparaison des formules (1), (2) prouve le théorème énoncé.

On peut maintenant indiquer, entre autres, deux applications de cette méthode de transformation.

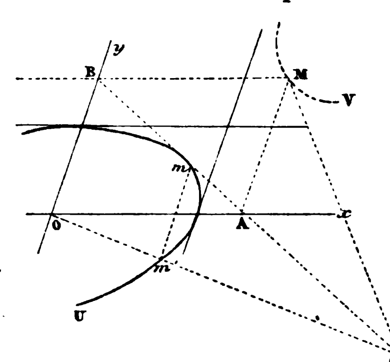
1° Si V est une droite ayant pour équation

$$bX + aY = ab,$$

la courbe correspondante U est représentée par

$$(bx + ay - ab)^2 = 4abxy.$$

Cette courbe U est une parabole, tangente aux droites ox, oy, aux points où elles sont coupées par V. Ce résultat est bien connu, et peut se démontrer géométriquement, très simplement.



2° Si V est une conique représentée par

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

l'équation de la tangente au point x' y', est

$$Axx' + Byy' = 1.$$

On a donc, pour les coordonnées du point correspondant M,

$$X = \frac{1}{Ax'}, \qquad Y = \frac{1}{By'},$$

avec la relation $\qquad Ax'^2 + By'^2 = 1.$

Le lieu cherché est donc la quartique dont l'équation est

$$ABX^2Y^2 = AX^2 + BY^2\ (*).$$

(*) L'énoncé, par une erreur d'impression, portait X^2Y^2, au lieu de ABX^2Y^2. L'homogénéité, non vérifiée, rendait l'erreur manifeste. G. L.

C'est l'équation d'une *Kreuzcurve* DROITE OU OBLIQUE, selon que les axes des coordonnées sont rectangulaires ou obliques.

Pour avoir la tangente en M, à la Kreuzcurve, nous observons que les droites MB, M*m*, MA, et la tangente inconnue, formant un faisceau harmonique, le point μ où cette tangente coupe AB est le conjugué harmonique de *m*, sur AB.

Cette propriété remarquable permet de construire, par points et par tangentes, par un tracé très simple, les Kreuzcurves, droites ou obliques.

Dans les cas où yox est un angle droit, $o\mu$ est symétrique de om par rapport à ox ; cette remarque simplifie, pour la Kreuzcurve droite, le tracé de la tangente.

Pour la Kreuzcurve oblique, on doit prendre le point m', où la parallèle à oy, menée par m, rencontre l'ellipse U ; Om' coupe AB au point μ qui appartient à la tangente en M.

QUESTION PROPOSÉE

305. — On donne deux droites rectangulaires, Ox, Oy. Par l'origine O, on fait passer une circonférence Γ de rayon invariable. Soient Δ, Δ' deux droites parallèles aux axes et tangentes à Γ. La droite qui joint le point O au point de concours des droites Δ, Δ' coupe Γ en un certain point I, dont on demande le lieu géométrique. G. L.

ERRATUM. — Ajouter à la question 298 : *si* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sont des quantités de même signe.*

Dans tous les cas, l'équation n'a pas plus de deux racines imaginaires. De plus, sa dérivée a toutes ses racines réelles et, parmi celles-ci, une est nulle.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2?614-11-90.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS